1) Zeige, dass die folgende Gleichung gilt:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx := \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Hinweis: Verwende dazu den Satz von Fubini und die Identität

$$\int_0^t e^{-ux}\sin(x)\,dx = \frac{1}{1+u^2}\left(1 - e^{-ut}(u\sin(t)+\cos(t)\right), \qquad \text{für } u>0.$$

2) Seien $(X,\mathcal{A},\mu)$ und $(Y,\mathcal{B},\nu)$ zwei σ-endliche Massräume und seien $f \in \mathcal{L}^1(\mu),\quad g \in \mathcal{L}^1(\nu)$. Definiere

$$h\colon X\times Y \to \mathbb{R},\ h(x,y) := f(x)\cdot g(x).$$

Zeige, dass $h \in \mathcal{L}^1(\mu\otimes\nu)$ und

$$\int_{X\times Y} h\,d(\mu\otimes\nu) = \int_X f\,d\mu \cdot \int_Y g\,d\nu$$

gilt.

3) Seien $X = Y = [0,1]$ und betrachte die Massräume $(X,\mathcal{A},m)$, $(Y,2^Y,\nu)$, wobei $\mathcal{A}$ die Lebesgue σ-Algebra, m das Lebesgue-Mass und ν das Zählmass ist. Sei $\Delta = \big\{(x,x)\,\big|x\in X\big\} \subseteq X\times Y$.

   a) Berechne für $f = \chi_\Delta$:

   $$\int_X\left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right)dm(x)$$

   und

   $$\int_Y\left(\int_X f(x,y)\,dm(x)\right)d\nu(y).$$

   b) Die Ergebnisse in a) simmen *nicht* überein. Wieso ist dies kein Widerspruch zum Satz von Fubini?

4) Definiere $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \begin{cases} y^{-2} & \text{falls } 0 < x < y < 1, \\ -x^{-2} & \text{falls } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist diese Funktion Lebesgue integrierbar?

Hinweis: Verwende den Satz von Fubini.

5) Sei $f \in L^p(\mathbb{R}, m)$, wobei m das Lebesgue-Mass bezeichnet. Zeige folgende Gleichung mit dem Satz von Fubini:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx = p \int_0^\infty y^{p-1} m\left(\{|f| \geq y\}\right) dy.$$

Hinweis: Verwende $|f(x)|^p = \int_0^{|f(x)|} p y^{p-1} dy$.