1) a) Sei A eine fixe Teilmenge von X. Bestimme die von $\{A\}$ erzeugte σ-Algebra von Teilmengen von X.

Lösung: Die von $\{A\}$ generierte σ-Algebra muss notwendigerweise folgende Elemente enthalten:

$$\emptyset, A, A^c, X.$$

Da die Menge $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ bereits unter Komplementbildung und Vereinigung abgeschlossen ist, handelt es sich bereits um die von $\{A\}$ generierte σ-Algebra.

$\square$

b) Sei X überabzählbar. Sei

$$\mathcal{S} = \{E \subset X : E \text{ oder } E^c \text{ ist höchstens abzählbar}\}.$$

Zeige, dass $\mathcal{S}$ die von den einpunktigen Teilmengen von X erzeugte σ-Algebra ist.

Lösung: In einem ersten Schritt zeigen wir, dass $\mathcal{S}$ tatsächlich eine σ-Algebra ist. Natürlich sind $\emptyset$ und X Elemente von $\mathcal{S}$. Ebenfalls offensichtlich ist, dass $\mathcal{S}$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist. Sei nun $\{A_k\} \subset \mathcal{S}$. Falls jedes A_k höchstens abzählbar ist, dann ist $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ebenfalls höchstens abzählbar, weshalb diese Vereinigung in $\mathcal{S}$ liegt. Falls A_m für einige m überabzählbar ist, dann ist das Komplement A_m^c höchstens abzählbar weil $A_m \in \mathcal{S}$. Da

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^c \subset A_m^c,$$

ist also das Komplement von $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ höchstens abzählbar und deshalb

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S}.$$

Es muss noch gezeigt werden, dass $\mathcal{S}$ von den einpunktigen Teilmengen von X erzeugt wird. Per Definition enthält $\mathcal{S}$ die einpunktigen Teilmengen von X. Ausserdem gilt für jedes Element A von $\mathcal{S}$, dass entweder A oder A^c als abzählbare Vereinigung von einpunktigen

Teilmengen von X geschrieben werden kann. Also kann tatsächlich jedes Element von $\mathcal{S}$ mit Hilfe von abzählbaren Vereinigung oder Komplementbildung durch einpunktige Teilmengen von X erzeugt werden.

$\square$

2) Es seien X und Y Mengen und $f\colon X \to Y$ sei eine Abbildung.

a) Wenn $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf Y ist, zeige, dass

$$\{f^{-1}(E) : E \in \mathcal{B}\}$$

eine σ-Algebra auf X ist.

Solution: Beachte $X = f^{-1}(Y)$ (somit gilt $X \in \mathcal{B}$) und

$$(f^{-1}(B))^c = \{x \in X \mid f(x) \notin B\} = \{x \in X \mid f(x) \in B^c\} = f^{-1}(B^c)$$

für alle $B \in \mathcal{B}$, also ist $\mathcal{B}$ unter Komplementbildung abgeschlossen. Weiterhin gilt für alle Folgen $(B_i) \subseteq \mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i) &= \{x \in X \mid \text{ es gibt eine natürliche Zahl } i \geq 1 \text{ so dass } f(x) \in B_i\} \\ &= \left\{x \in X \;\middle|\; f(x) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right\} \\ &= f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right).\end{aligned}$$

Somit ist $\mathcal{B}$ abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen und alle Eigenschaften einer σ-Algebra sind erfüllt. $\square$

b) Wenn $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X ist, zeige, dass

$$\{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra auf Y ist.

Solution: Wir definieren $\mathcal{B} = \{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$. Beachte $f^{-1}(Y) = X$, somit ist $Y \in \mathcal{B}$. Es sei $E \subset Y$ so dass $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$. Weil $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist, folgt, dass $f^{-1}(E)^c = f^{-1}(E^c)$ ebenfalls in $\mathcal{A}$ enthalten ist, und somit $E^c \in \mathcal{B}$. Es sei (B_i) eine Folge in $\mathcal{B}$. Da $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i) \in \mathcal{A},$$

und somit ist $\mathcal{B}$ unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen.

$\square$

3) Zeigen Sie, dass jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ als eine höchstens abzählbare Vereinigung von Quadern

$$Q(a,b) = \left\{x = (x_1, \dots, x_n), \;\middle|\; a_i < x_i < b_i, \, \forall i = 1, \dots, n\right\},$$

mit $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, geschrieben werden kann.

Lösung: Sei $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

und d_∞ die induzierte Metrik

$$d_\infty(x,y) := \|x-y\|_\infty.$$

Da d_∞ äquivalent zur Euklidschen Metrik d ist[1], sind die induzierten Topologien identätisch. In anderen Worten, eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ is offen (bezüglich der Standardtopologie), genau dann wenn es für jedes Element $y \in U$ ein $\varepsilon_y > 0$ gibt, so dass

$$B_\infty(y, \varepsilon_y) := \{z \in \mathbb{R}^n \mid d_\infty(y,z) < \varepsilon_y\} \subseteq U.$$

Der Vorteil der Maximumsnorm ist, dass die offenen Bälle $B_\infty(y, \varepsilon_y)$ die Form eines Quaders haben.[2] Wir verwenden jetzt ein Dichtheitsargument: sei

$$x \in U \cap \mathbb{Q}^n$$

beliebig und $\varepsilon_x > 0$ maximal, so dass $B_\infty(x, \varepsilon_x) \subseteq U$ noch gilt. Wir behaupten, dass

$$\bigcup_{x \in U \cap \mathbb{Q}^n} B_\infty(x, \varepsilon_x) = U$$

[1]Es existiert ein $C > 1$ so dass $C^{-1}d(x,y) \leq d_\infty(x,y) \leq Cd(x,y)$ gilt.
[2]Überzeugen Sie sich davon!

gilt. Die "$\subseteq$Inklusion ist klar. Für ein beliebiges $y \in U$ wählen wir $\varepsilon_y > 0$, so dass $B_\infty(y, \varepsilon_y) \subseteq U$ gilt. Da $U \cap \mathbb{Q}^n$ dicht in U liegt, existiert ein $x \in U \cap \mathbb{Q}^n$ mit

$$d_\infty(x, y) < \frac{\varepsilon_y}{3}.$$

Mit der Dreiecksungleichung aber folgt

$$B_\infty(x, \varepsilon_y/2) \subseteq B_\infty(y, \varepsilon_y) \subset U,$$

da für $z \in B_\infty(x, \varepsilon_y/2)$ gilt

$$d_\infty(z, y) \leq d_\infty(z, x) + d_\infty(x, y) < \frac{\varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_y}{3} \leq \varepsilon_y.$$

Aufgrund der Maximalität von ε_x gilt dann aber $\varepsilon_x \geq \varepsilon_y/2$ und somit

$$B_\infty(x, \varepsilon_y/2) \subseteq B_\infty(x, \varepsilon_x).$$

Damit erhalten wir

$$y \in B_\infty(x, \varepsilon_x),$$

da $d_\infty(x, y) < \varepsilon_y/3 < \varepsilon_y/2$. Dies beweist die "$\supseteq$Inklusion.

Offensichtlich ist $U \cap \mathbb{Q}^n$ ist abzählbar, und da $B_\infty(x, \varepsilon_x)$ alles Quader sind (wie oben beobachtet) beendet dies den Beweis.

$\square$

4) Betrachte die Menge

$$\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

und definiere für $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a, \infty] = (a, \infty) \cup \{\infty\}, \ [-\infty, b) = (-\infty, b) \cup \{-\infty\}.$$

Eine Menge $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ heisst **offen**, falls U als eine abzählbare Vereinigung von Intervallen der Form (c, d), $(a, \infty]$, $[-\infty, b)$ mit a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ geschrieben werden kann.

a) Zeigen Sie, dass die Menge aller offenen U (wie oben definiert) eine Topologie auf $\overline{\mathbb{R}}$ definiert. Wir nennen diese Topologie die **Standardtopologie** auf $\overline{\mathbb{R}}$.

Lösung: Wir müssen zeigen, dass $\overline{\mathbb{R}}$ und $\emptyset$ offen sind, und dass beliebige Vereinigungen (resp. endliche Schnitte) von offenen Mengen offen wiederum offen sind.

Die Menge $\overline{\mathbb{R}}$ ist offen, da sie als endliche (und somit abzählbare) Vereinigung geschrieben werden kann: $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, 0) \cup (-1, \infty]$. Die leere Menge kann aufgefasst werden als das triviale Intervall $(a, a) = \emptyset$ und ist somit ebenfalls enthalten.

Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie von offenen Mengen. Falls jedes U_i weder ∞ noch $-\infty$ enthält, wissen wir, dass $U := \bigcup_i U_i$ in $\mathbb{R}$ (nicht zu verwechseln mit $\overline{\mathbb{R}}$!) mit der Standardtopologie offen ist, und somit als abzählbare Vereinigung von Intevallen (e_k, f_k), e_k, $f_k \in \mathbb{R}$, geschrieben werden kann (siehe Aufgabe 3)). Dies zeigt insbesondere, dass U auch in $\overline{\mathbb{R}}$ offen ist. Wir nehmen also oBdA an, dass jedes U_i wie folgt geschrieben werden kann:

$$U_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-\infty, b_n^i) \cup (c_n^i, d_n^i) \cup (a_n^i, \infty], \quad a_n^i,\ b_n^i,\ c_n^i,\ d_n^i \in \mathbb{R}.$$

Wir definieren

$$a^i = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n^i,\ b^i := \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n^i,\ a := \inf_{i\in I} a^i,\ b := \sup_{i\in I} b^i \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Es gilt

$$U_i = [-\infty, b^i) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (c_n^i, d_n^i) \cup (a^i, \infty],$$

und somit

$$\bigcup_{i\in I} U_i = [-\infty, b) \bigcup_{i\in I,\, n\in\mathbb{N}} (c_n^i, d_n^i) \cup (a, \infty].$$

Wie oben bereits erklärt, kann $\bigcup_{i\in I,\, n\in\mathbb{N}} (c_n^i, d_n^i)$ als abzählbare Vereinigung von Intervallen (e_k, f_k), e_k, $f_k \in \mathbb{R}$ geschrieben werden, und somit ist $\bigcup U_i$ offen in $\overline{\mathbb{R}}$.

Der Beweis, dass endliche Schnitte von offenen Mengen in $\overline{\mathbb{R}}$ wieder offen in $\overline{\mathbb{R}}$ sind, ist ähnlich und wird dem:r Leser:in überlassen.

$\square$

b) Zeigen Sie, dass die folgende Metrik $d\colon \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ die Standardtopologie auf $\overline{\mathbb{R}}$ induziert: Für $x,\, y \in \mathbb{R}$ definiere

$$
\begin{aligned}
d(x,y) &:= \frac{2|e^{x-y} - e^{y-x}|}{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-x-y}} \\
d(x,\infty) := d(\infty,x) &:= \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
d(x,-\infty) := d(-\infty,x) &:= \frac{2e^{x}}{e^x + e^{-x}} \\
d(-\infty,\infty) := d(\infty,-\infty) &:= 2.
\end{aligned}
$$

Lösung: Intervalle der Form (c,d), $(a,\infty]$, $[-\infty,b)$ mit $a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{R}$ bilden eine Basis der Standardtopologie auf $\overline{\mathbb{R}}$. Es reicht also zu zeigen, dass ε-Bälle bezüglich der Metrik $\bar{d}$ Basiselemente, wie oben beschrieben, definieren. Für ∞ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$
x \in B_{\bar{d}}(\infty,\varepsilon) \cap \mathbb{R} \iff \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < \varepsilon.
$$

Wir massieren die rechte Ungleichung:

$$
\begin{aligned}
\frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < \varepsilon &\iff 2e^{-x} < (e^x + e^{-x})\varepsilon \\
&\iff 2 < (e^{2x} + 1)\varepsilon \\
&\iff \frac{2}{\varepsilon} - 1 < e^{2x} \\
&\iff \frac{1}{2}\ln(2/\varepsilon - 1) < x.
\end{aligned}
$$

Für $\delta_\varepsilon := \frac{1}{2}\ln(2/\varepsilon - 1)$ gilt also

$$
B_{\bar{d}}(\infty,\varepsilon) \cap \mathbb{R} = (\delta_\varepsilon, \infty)
$$

und somit

$$
B_{\bar{d}}(\infty,\varepsilon) = (\delta_\varepsilon, \infty].
$$

Dasselbe symmetrische Argument zeigt auch, dass eine ε-Umgebung bezüglich $\bar{d}$ von $-\infty$ von der Form $[-\infty, \delta'_\varepsilon)$ ist.

Für ε-Umgebungen von Punkten $y \in \mathbb{R}$ betrachten wir nur den Fall $y = 0$ um etwas Schreibarbeit einzusparren.[3] Es gilt

$$
x \in B_{\bar{d}}(0,\varepsilon) \iff f(x) := \frac{|e^x - e^{-x}|}{e^x + e^{-x}} < \varepsilon.
$$

Man beobachte, dass die Funktion f ungerade ist, i.e. $f(-x) = -f(x)$ und dass auf $\mathbb{R}_{>0}$ die Funktion f monoton wachsend ist, da

$$
\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 > 0.
$$

[3] Es ist eine gute Übung das Argument auf beliebige $y \in \mathbb{R}$ zu erweitern.

Insbesondere ist wegen der Antisymmetrie f monoton fallend für negative Werte x. Zusammenfassend zeigt dies, dass $f(x) < \varepsilon$ äquivalent ist zu

$$x \in (-a, a),$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ von ε und x abhängt. Somit erhalten wir

$$B_{\bar{d}}(0, \varepsilon) = (-a, a).$$

$\square$

5) Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Funktion $f \colon X \to \mathbb{R}$ heisst **unterhalbstetig** (oder nach unten halb-stetig), falls für alle Punkte $x \in X$ und alle Folgen $(x_k)_{k\geq 1} \subset X$ mit $x_k \to x$ für $k \to +\infty$ gilt

$$f(x) \leq \liminf_{k\to+\infty} f(x_k).$$

Zeige: eine solche Funktion f ist Borel-messbar.

Lösung: Es sei $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Im Folgenden zeigen wir, dass die Menge $C_a := f^{-1}((-\infty, a])$ eine abgeschlossene Teilmenge von (X, d) ist – dies ist ausreichend um den Beweis zu beenden aufgrund von Satz 1.21 im Skript.[4] Es sei $(x_k)_{k\geq 1} \subset C_a$ eine Folge in C_a so dass $x_k \to x$ mit $k \to +\infty$ wobei $x \in X$. Um zu zeigen, dass C_a abgeschlossen ist, müssen wir zeigen, dass $x \in C_a$. Weil f unterhalbstetig ist gilt

$$f(x) \leq \liminf_{k\to+\infty} f(x_k) \leq a,$$

wobei die Ungleichung folgt, weil $x_k \in C_a$ und somit $f(x_k) \in (-\infty, a]$. Deshalb gilt $f(x) \in (-\infty, a]$, also $x \in C_a$, wie gewünscht.

$\square$

[4]Strikt gesehen muss man den Satz auf

$$\tilde{f} \colon X \to \overline{\mathbb{R}},\ \tilde{f}(x) := f(x)$$

anwenden – da die Inklusion $\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ stetig ist, ist f messbar, genau dann wenn $\tilde{f}$ messbar ist, und weil $\tilde{f}^{-1}([-\infty, a]) = f^{-1}((-\infty, a]$ gilt, ist das analoge Statement von Satz 1.21 für f gültig.