1) Sei $F \subset [0,1]$ eine abgeschlossene Menge und $\delta_F(z) = \inf\{|y-z| \,:\, y \in F\}$.

   a) Zeige mit Fubini, dass

$$\int_0^1 \frac{\delta_F(z)^\lambda}{|x-z|^{1+\lambda}}\, dz < +\infty$$

für alle $\lambda > 0$ und fast jedes $x \in F$.

Hinweis. Zeige, dass $\delta_F(x) = 0$ äquivalent ist zu $x \in F$, falls F abgeschlossen ist.

Lösung: Zuerst zeigen wir, dass $\delta_F(x) = 0$ äquivalent zu $x \in F$ ist, falls F geschlossen ist. Falls $x \in F$, gilt offensichtlich $\delta_F(x) = \inf\{|x-y| \,\big|\, y \in F\} = 0$. Andererseits, falls $\delta_F(x) = 0$, gibt es eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ so dass $|y_n - x| \to \delta_F(x) = 0$. D F abgeschlossen ist, existiert $y \in F$ mit $y_n \to y$. Also gilt $|y-x| = \lim_{n\to\infty}|y_n - x| = 0$ und somit $x = y \in F$.

Da $\delta_F(z) = 0$ für $z \in F$ gilt, impliziert der Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}\int_F \int_0^1 \frac{\delta_F(z)^\lambda}{|x-z|^{1+\lambda}}\, dz dx &= \int_F \int_{[0,1]\setminus F} \frac{\delta_F(z)^\lambda}{|x-z|^{1+\lambda}}\, dz dx \\ &= \int_{[0,1]\setminus F} \left(\delta_F(z)^\lambda \int_F \frac{1}{|x-z|^{1+\lambda}}\, dx \right) dz \ .\end{aligned}$$

Mit dem, was wir vorhin gezeigt haben, erhalten wir $|x-z| \geq \delta_F(z) > 0$ für $z \in [0,1]\setminus F$ und $x \in F$. Insbesondere gilt

$$\int_F \frac{1}{|x-z|^{1+\lambda}} dx \leq \int_{\{|x-z|\geq \delta_F(z)\}} \frac{1}{|x-z|^{1+\lambda}} dx \leq 2\int_{\delta_F(z)}^\infty \frac{1}{t^{1+\lambda}} dt = \frac{2}{\lambda \cdot \delta_F(z)^\lambda}\ ,$$

und deshalb

$$\int_{[0,1]\setminus F} \left(\delta_F(z)^\lambda \int_F \frac{1}{|x-z|^{1+\lambda}} dx \right) dz \leq \int_{[0,1]\setminus F} \frac{2}{\lambda} dz \leq \frac{2}{\lambda} < +\infty\ ,$$

was widerrum

$$\int_0^1 \frac{\delta_F(z)^\lambda}{|x-z|^{1+\lambda}} dz < +\infty\ ,$$

für fast alle $x \in F$ impliziert.

$\square$

b) Sei $F \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und $f \geq 0$ Lebesgue integrierbar auf dem Komplement von F. Zeige: Für jedes $\lambda > 0$ ist die Funktion

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta_F(z)^\lambda}{|x-z|^{1+\lambda}} f(z)\, dz$$

Lebesgue integrierbar auf F.

Lösung: Wir argumentieren wie im Teil a) und verwenden Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_F \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta_F(z)^\lambda}{|x-z|^{1+\lambda}} f(z) dz dx &= \int_{\mathbb{R}\setminus F} \delta_F(z)^\lambda f(z) \left(\int_F \frac{1}{|x-z|^{1+\lambda}} dx \right) dz \\
&\leq \int_{\mathbb{R}\setminus F} \delta_F(z)^\lambda f(z) \left(\frac{2}{\lambda} \delta_F(z)^{-\lambda} \right) dz \\
&= \frac{2}{\lambda} \int_{\mathbb{R}\setminus F} f(z) dz < +\infty \ ,
\end{aligned}$$

was zeigt, dass

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta_F(z)^\lambda}{|x-z|^{1+\lambda}} f(z) dz$$

Lebesgue integrierbar auf F ist.

□

2) Betrache $I = [0,1]$ und den Lebesgue Massraum $(I^3, \mathcal{A}, m)$. Sei

$$f \colon I^3 \to [0,\infty],\ f(x,y,z) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|y-z|}}, & \text{falls } y \neq z, \\ \infty, & \text{falls } y = z. \end{cases}$$

Zeige, dass $f \in \mathcal{L}^1(m)$ gilt.

Lösung: Wir bemerken, dass $f \geq 0$ gilt und f stetig auf $I^3 \setminus \{y \neq z\}$ ist. Ausserdem ist $\{f = \infty\}$ abgeschlossen, und somit ist f Lebesgue-messbar. Aus Lemma 7.6 folgt

$$\mathcal{B}_{I^3} = \mathcal{B}_I \otimes \mathcal{B}_{I^2},$$

was uns dann erlaub den Satz von Fubini (Theorem 7.16) anzuwenden:

$$\int_{I^3} f(x,y,z)\, dm(x,y,z) = \int_I \left(\int_{I^2} f(x,y,z)\, dm(y,z) \right) dm(x).^1$$

[1] Abusive notation: m bezweichnet hier jeweils das Lebesgue Mass auf I, I^2 oder I^3.

Weil $(y,z) \mapsto f(x,y,z)$ für jedes $x \in I$ Lebesgue-messbar ist, lässt sich nochmal Fubini anwenden:

$$\int_{I^2} f(x,y,z)\, dm(y,z) = \int_I \left(\int_I f(x,y,z)\, dm(z) \right) dm(z).$$

Sei $z \in I$ fixiert. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_I f(x,y,z)\, dm(y) &= \int_{I \setminus \{z\}} \frac{1}{\sqrt{|y-z|}}\, dm(y) \\
&= \int_0^z \frac{1}{\sqrt{z-y}}\, dm(y) + \int_z^1 \frac{1}{\sqrt{y-z}}\, dm(y) \\
&= \left[-2\sqrt{z-y}\right]_{y=0}^{y=z} + \left[2\sqrt{y-z}\right]_{y=z}^{y=1} \\
&= 2\sqrt{z} + 2\sqrt{1-z}.
\end{aligned}$$

Deshalb folgt für jedes $x \in I$:

$$\int_{I^2} f(x,y,z)\, dm(y,z) = \int_I 2\sqrt{z} + 2\sqrt{1-z}\, dm(z) = \frac{8}{3},$$

und somit

$$\int_{I^3} |f(x,y,z)|\, dm(x,y,z) = \int_{I^3} f(x,y,z)\, dm(x,y,z) = \int_I \frac{8}{3}\, dm(x) = \frac{8}{3} < infty,$$

was $f \in \mathcal{L}^1(m)$ beweist.

$\square$

3) *Erinnerung Analysis:*

Zeige die **Youngsche Ungleichung**:

Seien a, $b \geq 0$ und $1 < p$, $q < \infty$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Dann gilt:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Hinweis: Verwende, dass die Exponentialfunktion konvex ist.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
ab &= \exp(\log(ab)) \\
&= \exp(\log(a) + \log(b)) \\
&= \exp(1/p \log(a^p) + 1/q \log(b^q)) \\
&\leq 1/p \exp(\log(a^p) + 1/q \exp(\log(b^q)) \\
&= \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},
\end{aligned}$$

wobei wir bei der Ungleichung verwendet haben, dass $1/p + 1/q = 1$ gilt und exp konvex ist.

□

4) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum mit $\mu(X) = 1$, $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\phi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Zeige:

Jensen's Ungleichung:

$$\phi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X \phi \circ f d\mu.$$

Gehe dabei wie folgt vor:

a) Zeige, dass $\phi^- \circ f$ integrierbar ist, so dass die rechte Seite

$$\int_X \phi \circ f d\mu := \int_X \phi^+ \circ f\, d\mu - \int_X \phi^- \circ f\, d\mu \in (-\infty, \infty]$$

wohldefiniert ist, auch wenn möglicherweise $\int_X \phi^+ \circ f d\mu = \infty$ gilt.

Lösung: Mit dem Hinweis unten wissen wir, dass $\phi^- \circ f = \max\{0, -\phi \circ f\}$ stetig und somit Lebesgue-messbar ist. Ausserdem existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\phi(x) \geq ax + b$ für alle $x \in X$. Insbesondere erhalten wir

$$\phi^- \circ f(x) \leq \max\{0, -af(x) - b\},$$

und somit

$$
\begin{aligned}
\int_X |\phi^- \circ f|\, d\mu &= \int_X \phi^- \circ f\, d\mu \\
&\leq \int_{\{af+b\leq 0\}} -a \cdot f - b\, d\mu \\
&\leq \int_X |a \cdot f + b|\, d\mu \\
&\leq a \cdot \|f\|_1 + b \\
&< \infty,
\end{aligned}
$$

weil f eine L^1-funktion ist. $\square$

b) Zeige: Ist $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine weitere konvexe Funktion mit

$$
\psi(x) \leq \phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},
$$

so gilt

$$
\int_X \psi \circ f\, d\mu \leq \int_X \phi \circ f\, d\mu,
$$

wobei die Integrale jeweils wie in a) definiert sind.

Lösung: Wir haben $\phi^+ \circ f = \max\{0, \phi \circ f\} \geq \max\{0, \psi \circ f\} = \psi^+ \circ f$ und ähnlich $\phi^- \circ f \leq \psi^- \circ f$. Da beide ϕ und ψ convex sind, können wir die Integral-Definition aus a) verwenden und erhalten

$$
\begin{aligned}
\int_X \phi \circ f d\mu &= \int_X \phi^+ \circ f\, d\mu - \int_X \phi^- \circ f\, d\mu \\
&\geq \int_X \psi^+ \circ f\, d\mu - \int_X \psi^- \circ f\, d\mu \\
&= \int_X \psi \circ f\, d\mu.
\end{aligned}
$$

$\square$

c) Zeige die Ungleichung von Jensen.

Lösung: Wir folgen dem Hinweis unten und wählen a, $b \in \mathbb{R}$ so dass $\phi(x) \geq ax + b$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt mit

$$
\phi(x_0) = ax_0 + b,\ x_0 = \int_X f\, d\mu.
$$

Definiere aussderm die konvexe Funktion $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \psi(x) = ax+b$. Also gilt $\psi \le \phi$ und wir erhalten mit Teil b) im letzten Schritt:

$$\begin{aligned}
\phi\left(\int_X f\,d\mu\right) &= \phi(x_0) \\
&= ax_0 + b \\
&= a\int_X f\,d\mu + b \\
&= \int_X af + b\,d\mu \\
&= \int_X \psi \circ f\,d\mu \\
&\le \int_X \phi \circ f\,d\mu.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung: Man darf ohne Beweis die folgenden Eigenschaften von konvexen Funktionen $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus der Analysis verwenden:

i) ϕ ist stetig,

ii) Zu jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt es $a,\ b \in \mathbb{R}$, so dass $\phi(x) \ge ax+b,\ \forall x \in \mathbb{R}$ und $\phi(x_0) = ax_0 + b$ gilt.

Für c) wähle $x_0 = \int_X f\,d\mu$ und verwende b).

5) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum, $p,\ q,\ r \in [1,\infty]$ und $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$.

a) Zeige, dass unter der Annahme

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

das Produkt $f \cdot g$ in $\mathcal{L}^1(\mu)$ liegt und die folgende Ungleichung gilt:

$$\|f \cdot g\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Hinweis: Theorem 4.1 kann weiterhelfen.[2]

[2]Es folgt *nicht* sofort aus Theorem 4.1! Was ist der Unterschied?

Lösung: Die Hölder'sche Ungleichung (i.e. Theorem 4.1) wie im Skript geschrieben, gilt für $p, q \in (1, \infty)$. Falls $p = 1$ ist, muss $q = \infty$ gelten, damit $1/p + 1/q = 1$ noch gilt. In diesem Falle lässt sich die gewünschte Ungleichung direkt schliessen: sei $E \subset X$ eine Nullmenge bezüglich $g \colon X \to \mathbb{R}$ wie im Lemma 4.8. Dann gilt

$$\|f \cdot g\|_1 = \int_X |f \cdot g| \, d\mu = \int_{X \setminus E} |f| \cdot |g| \, d\mu \le \|g\|_\infty \cdot \int_X |f| \, d\mu = \|g\|_\infty \cdot \|f\|_1.$$

Der Fall mit $q = 1$ ist symmetrisch zum obigen Fall und somit haben wir Theorem 4.1 zu $p, q \in [1, \infty]$ erweitert.

□

b) Verwende a) um zu zeigen, dass für

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

gilt:

$$f \cdot g \in \mathcal{L}^r(\mu) \text{ mit } \|f \cdot g\|_r \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Lösung: Wir definieren $p' = p/r$ und $q' = q/r$. Dann gilt

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = \frac{r}{p} + \frac{r}{q} = r \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = 1.$$

Ausserdem gilt

$$\|f^r\|_{p'} = \left(\int_X |f^r|^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{r}{p}} = \|f\|_p^r < \infty,$$

was zeigt, dass f^r in $\mathcal{L}^{p'}(\mu)$ liegt. Ähnlich gilt $g^r \in \mathcal{L}^{q'}(\mu)$. Also schliessen wir aus a):

$$\begin{aligned}
\|f \cdot g\|_r^r &= \|f^r \cdot g^r\|_1 \\
&\le \|f^r\|_{p'} \cdot \|g^r\|_{q'} \\
&= \|f^r\|_{\frac{p}{r}} \cdot \|g^r\|_{\frac{q}{r}} \\
&= \|f\|_p^r \cdot \|g\|_q^r \\
&= \left(\|f\|_p \cdot \|g\|_q \right)^r .
\end{aligned}$$

Wenn man die r-te Wurzel auf beiden Seiten in der obigen Ungleichung zieht, erhaltet man das gewünschte Ergebnis.

□