1) Finde jeweils einen Massraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$, sodass für alle $p, q \in [1, \infty]$ gilt

a) $L^p(\mu) \subsetneq L^q(\mu)$, falls $p < q$,

Lösung:

Wir können Annehmen, dass p endlich ist. Sei $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \#)$ wobei $\#$ das Zählmass ist. Für $f \in L^p(\#)$ gilt

$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{N}} \|f\|^p \, d\# = \sum_{n\in\mathbb{N}} |f(n)|^p < \infty.$$

Da $p \geq 1$, muss also $f(n)$ eine Nullfolge sein. Insbesondere ist $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, und daher

$$\|f\|_\infty < \infty.$$

Dies zeigt die gewünschte Inklusion; um zu sehen, dass diese strikt ist, beachte dass $g(n) = 1$ in $L^\infty(\#)$ liegt, aber nicht in $L^p(\#)$ ist.
Sei nun q auch endlich. Dann gilt

$$\|f\|_q^q = \int_{\mathbb{N}} \|f\|^q \, d\# = \sum_{n\in\mathbb{N}} |f(n)|^q = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(f(n)^{\frac{q}{p}}\right)^p \leq C + \sum_{n=N}^{\infty} f(n)^p,$$

für ein $C > 0$ und $N >> 1$, da eventuell $|f(n)| < 1$ gilt, und deswegen $|f(n)|^{q/p} \leq |f(n)|$ erfühllt ist (bemerke: $q/p > 1$). Insbesondere erhalten wir

$$\|f\|_q \leq \left(C + \|f\|_p^p\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

was die gewünschte Inklusion zeigt. Für die strikte Inklusion, sei $\varepsilon > 0$ mit $p < q - \varepsilon < q$. Dann ist die Funktion

$$g(n) = \frac{1}{n^{\frac{1}{q-\varepsilon}}}$$

in $L^q(\#)$, aber nicht in $L^p(\#)$, denn

$$\|g\|_q^q = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^{\frac{q}{q-\varepsilon}}}$$

konvergiert, aber

$$\|g\|_p^p = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^{\frac{p}{q-\varepsilon}}} \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$$

nicht.

b) $L^p(\mu) \subsetneq L^q(\mu)$ falls $q < p$,

Lösung:

Wir behaupten, dass die Inklusion für sämtliche *endliche* Massräume gilt, i.e. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mit $\mu(X)$. Falls $p = \infty$ gilt, dann haben wir für $f \in L^p(\mu)$:

$$\|f\|_q^q = \int_X |f|^q \, d\mu \leq \mu(X) \cdot \|f\|_\infty^q < \infty,$$

wobei wir (streng genommen) Lemma 4.8 verwendet haben.

Sei nun $q < \infty$. Dann erhalten wir mit der Hölder'schen Ungleichung mit $p' := \frac{p}{q} > 1$ und q' so dass $1/p' + 1/q' = 1$:

$$\begin{aligned}
\|f\|_q^q &= \int_X 1 \cdot |f|^q \, d\mu \\
&= \|1 \cdot |f|^q\|_1 \\
&\leq \|1\|_{q'} \cdot \||f|^q\|_{p'} \\
&= \mu(X)^{\frac{1}{q'}} \cdot \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{q}{p}} \\
&= \mu(X)^{\frac{1}{q'}} \cdot \|f\|_p^q \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Dies zeigt also die allgemeine Inklusion für endliche Massräume. Für die strikte Inklusion wählen wir als Massraum $([0,1], \mathcal{A}, m)$. Wir behaupten, dass für $\alpha > 0$ gilt

$$f(x) := \frac{1}{x^\alpha} \in L^p([0,1], m) \iff p \cdot \alpha < 1.$$

Tatsächlich haben wir für $p \cdot \alpha \neq 1$:

$$\|f\|_p^p = \int_0^1 \frac{1}{x^{p\alpha}} \, dm(x) = \left[\frac{1}{1 - p\alpha} x^{1-p\alpha} \right]_0^1 = \begin{cases} \frac{1}{1-p\alpha}, & \text{falls } 1 > p\alpha, \\ \infty, & \text{falls } 1 < p\alpha. \end{cases}$$

Für $p\alpha = 1$ gilt

$$\|f\|_p^p = \int_0^1 \frac{1}{x} \, dm(x) = \ln(1) - \ln(0) = \infty.$$

Dies beweist die obige Behauptung. Falls $p = \infty$ ist, dann ist q endlich und für $\alpha > 0$ mit $q\alpha < 1$ ist die Funktion $f(x) = 1/x^\alpha$ in $L^q(m)$, aber

$$\|f\|_\infty \geq \|\chi_{[1/n,1]} \cdot f\|_\infty = n^\alpha \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

was zeigt, dass f nicht in $L^\infty(\mu)$ liegt. Dies zeigt die strikte Inklusion im Falle $p = \infty$. Für $q < p$ endlich wählen wir α, so dass $p\alpha > 1$ und $q\alpha < 1$ gilt. Mit der Behauptung von oben erhalten wir also wieder, dass $f(x) = 1/x^\alpha$ in $L^q(m)$ liegt und gleichzeitig nicht in $L^p(m)$ ist.

c) $L^p(\mu) \nsubseteq L^q(\mu)$ und $L^q(\mu) \nsubseteq L^p(\mu)$, falls $p \neq q$.

Lösung:

Sei $([0,\infty), \mathcal{A}, m)$ unser Massraum. Angenommen $q < p$. Sei $\alpha > 0$ so dass $q\alpha < 1 < p\alpha$. Dann zeigt die Lösung aus Teil b), dass

$$f(x) := \chi_{[0,1]} \frac{1}{x^\alpha}$$

in $L^q(m)$, aber nicht $L^p(m)$ liegt. Eine ähnliche Überlegung zeigt, dass die Funktion

$$g(x) := \chi_{[1,\infty)} \frac{1}{x^\alpha}$$

in $L^p(m)$, aber nicht $L^q(m)$ liegt. Dies beweist die gewünschte Aussage im Falle $q < p$.

Im Falle $q > p$ kann man im obigen Beweis p und q einfach austauschen. Dies beweist die gewünschte Aussage.

2) Es sei μ ein Mass auf einem Massraum Ω. Wir sagen eine Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ von reellen messbaren Funktionen auf Ω konvergiere *im Mass* gegen die reelle messbare Funktion f, falls für alle $\epsilon > 0$ gilt

$$\mu\left(\left\{\omega \in \Omega : |f_n(\omega) - f(\omega)| > \epsilon\right\}\right) \to 0 \text{ mit } n \to +\infty.$$

Wir nehmen nun zusätzlich an, dass $\mu(\Omega) < +\infty$. Beweise:

a) Falls $f_n(\omega) \to f(\omega)$ fast überall, dann $f_n \to f$ im Mass.

Lösung:

Es existiert eine Menge $A \subset \Omega$ mit $\mu(A) = \mu(\Omega)$, so dass $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in A$. Es gilt

$$A = \bigcup_{N=1}^{+\infty} A_N, \text{ wobei } A_N := \left\{x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \text{ für alle } n \geq N\right\}.$$

Somit $\mu(A_N) \to \mu(A) = \mu(\Omega)$ mit $N \to +\infty$, also insbesonders $\mu(A_N^c) \to 0$ mit $N \to +\infty$. Definiere

$$B_N := \left\{\omega \in \Omega : |f_N(\omega) - f(\omega)| > \epsilon\right\}.$$

Beachte, dass gilt $B_N \subset A_N^c$. Somit haben wir gezeigt $\mu(B_N) \to 0$ mit $N \to +\infty$ wie gewünscht.

b) Falls $f_n \to f$ im Mass, dann existiert eine Teilfolge von $(f_n)_{n\geq 1}$, welche fast überall punktweise gegen f konvergiert.

Lösung:

Es sei $\epsilon > 0$. Wähle rekursiv eine Folge $n_k \geq 1$ so dass $n_k \geq n_{k-1}$ und

$$\mu\left(\left\{\omega \in \Omega : |f_{n_k}(\omega) - f(\omega)| > 1/k\right\}\right) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Es sei $A_k := \left\{\omega \in \Omega : |f_{n_k}(\omega) - f(\omega)| > 1/k\right\}^c$. Somit gilt

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}\bigcup_{\ell=k}^{+\infty} A_\ell^c\right) \leq \lim_{k\to+\infty}\sum_{\ell=k}^{+\infty}\frac{1}{\ell^2} = 0$$

und deshalb

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}\bigcap_{\ell=k}^{+\infty} A_\ell\right) = 1.$$

Beachte, falls $x \in \bigcup_{k=1}^{+\infty}\bigcap_{\ell=k}^{+\infty} A_\ell$, dann gilt $f_{n_k}(x) \to f(x)$ mit $k \to +\infty$. Die Teilfolge f_{n_k} konvergiert also fast sicher gegen f, was zu zeigen war.

3) Es bezeichne λ das Lebesgue-Mass auf $\mathbb{R}$. Finde jeweils eine Folge messbarer Funktionen $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so dass

a) $f_n \to 0$ gleichmässig, aber nicht in $L^1(\lambda)$.

Lösung:

Wir definieren für alle $n \geq 1$

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{n} & x \in (0, n^2) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt $f_n \to 0$ gleichmässig, da $|f_n(x)| < \frac{1}{N}$ für alle $n \geq N$ und $x \in \mathbb{R}$. Weiters gilt für alle $n \geq 1$, dass

$$\|f_n\|_1 = n.$$

Somit konvergiert f_n nicht in $L^1(\lambda)$ gegen die Nullfunktion.

b) $f_n \to 0$ punktweise und im Mass, aber nicht in $L^1(\lambda)$ und auch nicht gleichmässig.

Lösung:

Wir definieren für alle $n \geq 1$

$$f_n(x) := \begin{cases} n & x \in (0, \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt $f_n \to 0$ punktweise und da für alle $\epsilon > 0$ gilt

$$\lambda\left(\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| > \epsilon\}\right) \leq \frac{1}{n},$$

konvergiert die Folge f_n auch im Mass gegen die Nullfunktion. Wir berechnen

$$\|f_n\|_1 = 1 \quad n \geq 1,$$

somit konvergiert die Folge f_n nicht in $L^1(\lambda)$ gegen die Nullfunktion. Weil

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty,$$

konvergiert die Folge f_n nicht gleichmässig gegen die Nullfunktion.

c) $f_n \to 0$ punktweise, aber nicht im Mass.

Lösung:

Wir definieren für alle $n \geq 1$

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & x \in (n, n+1) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Folge f_n konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion, da $f_N(x) = 0$ für alle $N \geq 1$ mit $N > |x|$. Da für alle $n \geq 1$ gilt

$$\mu\left(x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| > \frac{1}{2}\right) = 1,$$

konvergiert die Funktionenfolge f_n nicht im Mass gegen die Nullfunktion.

d) $f_n(x)$ divergiert für alle $x \in (0,1)$, aber trotzdem $f_n \to 0$ im Mass.

Lösung:

Es sei $a_1 := 1$ und $a_n := a_{n-1} + n$. Definiere $f_1 := \chi_{[0,1]}$ und für $k := a_{n-1} + \ell$, wobei $n \geq 2$ und $1 \leq \ell \leq n$, definiere

$$f_k := n\chi_{[\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n}]} + \frac{1}{n}\chi_{[0,1]}.$$

Beachte, dass für jedes $\epsilon > 0$ gilt

$$\lim_{k\to+\infty} \mu\left(\{x \in \mathbb{R} : |f_k(x)| > \epsilon\}\right) = 0.$$

Die Funktionenfolge f_k konvergiert also im Mass zu der Nullfunktion. Es sei $x \in [0,1]$. Für jedes $n \geq 1$ existiert ein $1 \leq \ell \leq n$ so dass $x \in [\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n}]$. Also $f_{a_{n-1}+\ell}(x) \geq n$, und deshalb divergiert die Folge $f_k(x)$ für jedes $x \in [0,1]$.

4) Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume.

a) Zeige, dass eine lineare Abbildung

$$F\colon V \to W$$

genau dann stetig ist wenn

$$\|F\| := \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|F(v)\|_W}{\|v\|_V} < \infty$$

gilt. In diesem Fall sagt man auch: F ist beschränkt.

Lösung:

Sei F linear und stetig. Insbesondere ist F stetig bei 0. Sei $\delta > 0$ so, dass

$$\|v\|_V \leq \delta \implies \|F(v)\|_W \leq 1.$$

Sei nun v wie oben mit $v \neq 0$. Definiere $c := \delta \cdot \|v\|_V^{-1}$. Dann gilt $\|cv\|_V = \delta$, also auch

$$1 \geq \|F(cv)\|_W = c \cdot \|F(v)\|_W = \delta \frac{\|F(v)\|_W}{\|v\|_v}$$

wegen der Linearität von F. Insbesondere

$$\frac{\|F(v)\|_W}{\|v\|_V} \leq \delta^{-1},$$

für jeden Vektor $v \neq 0$ in V mit $\|v\|_V \leq \delta$. Da Skalieren mit reellen Vielfachen den Bruch links nicht verändert (weil F linear ist), gilt also:

$$\frac{\|F(v')\|_W}{\|v'\|_V} \leq \delta^{-1}, \quad \forall v' \in V \setminus \{0\}.$$

Dies beweist $\|F\| \leq \delta^{-1} < \infty$.

Für die andere Richtung sei F beschränkt. Wir haben

$$\|F(v) - F(v')\|_W = \|F(v - v')\|_W \leq \|F\| \cdot \|v - v'\|_v,$$

wobei wir zuerst die Linearität von F verwendet haben und dann die Definition von $\|F\|$. Von der obigen Ungleichung ist klar, dass F Lipschitz-stetig ist, insbesondere stetig. Dies beendet den Beweis.

b) Sei $B(V,W) = \{F : V \to W \text{ linear} \mid \|F\| < \infty\}$ der Raum der beschränkten linearen Abbildungen. Zeige: $(B(V,W), \|\cdot\|)$ ist ein normierter Vektorraum. Falls W ein Banachraum ist, so ist $B(V,W)$ sogar ein Banachraum.

Lösung:

Wir zeigen nur die Vollständigkeit, falls W Banach ist.[1] Sei also $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $B(V,W)$, i.e. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so dass

$$\|A_k - A_k\| < \varepsilon, \quad \forall k,\, l \geq N.$$

Für ein fixes $v \in V$ erhalten wir

$$\|A_k(v) - A_l(v)\|_W = \|(A_k - A_l)(v)\|_W \leq \|A_k - A_l\| \cdot \|v\|_V,$$

was zeigt, dass $(A_n(v))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in W ist. Da W Banach ist, konvergiert $A_n(v)$. Wir definieren

$$A \colon V \to W,\ A(v) := \lim_{n\to\infty} A_n(v).$$

Zu zeigen ist nun, dass A linear und beschränkt ist und der $\|\cdot\|$-Grenzwert der Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Linearität ist einfach:

$$A(\lambda v+v') = \lim_{n\to\infty} A_n(\lambda v+v') = \lim_{n\to\infty} (\lambda A_n(v) + A_n(v')) = \lambda A(v)+A(v'),$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $v, v' \in V$. Sei $\varepsilon > 0$ und N wie oben (Cauchy-Eigenschaft für $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$) und fixiere ein $l \geq N$. Es gilt

$$\|A(v) - A_l(v)\|_W \leq \limsup_{n\to\infty} \|A_n - A_l\| \cdot \|v\|_V \leq \varepsilon \cdot \|v\|_V.$$

Insbesondere

$$\begin{aligned}\|A(v)\|_W &\leq \|A(v) - A_l(v)\|_W + \|A_l(v)\|_W \\ &\leq \varepsilon \cdot \|v\|_V + \|A_k\| \cdot \|v\|_V \\ &= (\varepsilon + \|A_k\|) \cdot \|v\|_V,\end{aligned}$$

was

$$\|A\| \leq \varepsilon + \|A_k\| < \infty$$

beweist, also dass A beschränkt ist. Es gilt nur noch zu zeigen, dass A tatsächlich der Grenzwert von A_n ist. Tatsächlich, für $n \geq N$ wissen wir bereits, dass

[1] Wir überlassen dem/der Leser:in den Beweis, dass $(B(V,W), \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum ist.

$$\|A - A_n\| \leq \varepsilon,$$

siehe Ungleichung mit A_l oben. Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, können wir es gegen 0 schicken und finden gleichzeitig ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N(\varepsilon)$ die obige Ungleichung noch gilt. In anderen Worten:

$$\lim_{n\to\infty} \|A - A_n\|.$$

Dies zeigt, dass das lineare stetige A auch wirklich der Grenzwert von A_n bezüglich der $\|\cdot\|$-Norm auf $B(V, W)$ ist. Insgesamt haben wir also gezeigt, dass $B(V, W)$ vollständig ist.

5) Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, und $U \subseteq H$ ein Untervektorraum. Das *orthogonale Komplement* $U^\perp$ von U ist definiert als

$$U^\perp := \left\{ w \in H \;\middle|\; \langle v, w\rangle = 0 \text{ für alle } v \in U \right\}$$

Zeige die folgenden Aussagen:

a) $U^\perp \subset H$ ist ein (topologisch) abgeschlossener Untervektorraum. Ferner gilt

$$(\bar{U})^\perp = U^\perp,$$

und

$$U \subset (U^\perp)^\perp$$

Lösung:

Für $v, w \in H$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, und $u \in U$, gilt:

$$\langle \lambda v + w, u\rangle = \lambda \underbrace{\langle v, u\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle w, u\rangle}_{=0} = 0.$$

Dies zeigt, dass $U^\perp$ ein linearer Unterraum von H ist. Um zu zeigen, dass $U^\perp$ topologisch abgeschlossen ist, wählen wir eine Folge (v_n) in $U^\perp$, die gegen $v \in H$ konvergiert. Dann gilt für alle $u \in U$:

$$\langle v, u\rangle = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\langle v_n, u\rangle}_{=0} = 0,$$

also ist $v \in U^\perp$ was zeigt, dass $U^\perp$ topologisch abgeschlossen ist.

Die Inklusion $U^\perp \supseteq (\bar{U})^\perp$ ist klar, weil man die orthogonale Eigenschaft für eine kleinere Menge von Vektoren überprüfen muss.

Sei also $v \in U^\perp$ und $w \in \bar{U}$ wir wollen $\langle v, w\rangle = 0$ zeigen. Es existiert eine Folge w_n in U, die gegen w konvergiert. Insbesondere

$$\langle v, w\rangle = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\langle v, w_n\rangle}_{=0} = 0.$$

Also haben wir $U^\perp = (\bar{U})^\perp$ gezeigt.
Jetzt zeigen wir noch

$$U \subseteq (U^\perp)^\perp :$$

Sei $u \in U$ und $v \in U^\perp$ beliebig. Letzteres impliziert $\langle u, v\rangle = 0$. Dies zeigt die gewünschte Inklusion.

b) Ist U abgeschlossen, so gilt

$$H = U \oplus U^\perp \tag{1}$$

und ausserdem

$$U = (U^\perp)^\perp.$$

Allgemein gilt

$$\bar{U} = (U^\perp)^\perp.$$

Finde auch ein Gegenbeispiel zu (1), falls U *nicht* abgeschlossen ist.
Hinweis: Verwende Theorem 4.27 im Buch.
Lösung:
Für jeden Vektor $w \in H$ betrachten wir $w + U$ – diese Menge ist konvex weil U ein Unterraum ist, und topologisch abgeschlossen, weil U topologisch abgeschlossen ist. Insbesondere ist ist Theorem 4.27 drauf anwendwar und besagt, dass es eineutiges $v_0 \in w + U$ gibt, so dass

$$\|v_0\| \leq |w + u|$$

für alle $u \in U$ gilt. Wir können in der letzten Ungleichung auch $w-u$ schreiben, weil U ein Unterraum ist. Ausserdem ist $v_0 = w - w_0$, für ein eindeutiges $w_0 \in U$. Wir haben also, dass die Norm auf $w + U$ ein lokales minimum bei $w - w_0$ hat. Insbesondere gilt

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \|w - (w_0 + tu)\|^2 = 0,$$

weil $w_0 + tu$ in U liegt und aufgrund der Minimumseigenschaft von

$w - w_0$. Gleichzeitig gilt aber

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} \|w - (w_0 + tu)\|^2 \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} \langle (w - w_0) - tu, (w - w_0) - tu \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} \|w - w_0\|^2 + 2t\langle w - w_0, u\rangle + t^2\|u\|^2 \\ &= 2\langle w - w_0, u\rangle. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $w - w_0 \in U^\perp$ gilt, weil $u \in U$ oben beliebig war. Da $w_0 \in U$ eindeutig (in Abhängigkeit von w) gewählt worden ist, haben wir also eine eindeutige Zerlegung $w = (w - w_0) + w_0$ gefunden. Da für alle $v \in U \cap U^\perp$ die Gleichung

$$\|v\|^2 = \langle \underbrace{v}_{\in U}, \underbrace{v}_{\in U^\perp} \rangle = 0$$

gilt, folgt $U \cap U^\perp = \{0\}$. Dies beweist

$$H = U \oplus U^\perp.$$

Für die zwei Gleichungen beobachten wir erstemal, dass ganz allgemein

$$U \subseteq (U^\perp) \perp =: V$$

gilt, siehe Teil a). Zweifaches anwenden von a) zeigt aber auch, dass V ein topologisch abgeschlossener Unterraum von H ist. Mit dem ersten Teil der Lösung hier ergibt sich also

$$H = V \oplus V^\perp.$$

Da $U \cap U^\perp = \{0\}$ muss also $U^\perp \subseteq V^\perp$ gelten. Gleichzeitig ist aber auch $H = U \oplus U^\perp$. Dies impliziert sofort, dass die beiden Inklusionen $U \subseteq V$ und $U^\perp \subseteq V^\perp$ sogar Gleichheiten sind.

Für ein Gegenbeispiel betrachte $\ell^2(\mathbb{N})$ den Raum der reellwertigen Folgen mit dem l^2-Sakalarprodukt. Sei U der Raum aller reellwertigen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $a_n = 0$ für alle ausser endlichen vielen $n \in \mathbb{N}$ gilt.[2] Dies ist ein Unterraum[3], der Dicht in $l^2(\mathbb{N})$ ist: sei dazu $b := (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ und

$$a_n^k = \begin{cases} b_n, & \text{für } n = 1, \dots, k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}.$$

[2]Also ist $U = \mathbb{R}^\infty$ wie in Serie 8, Aufgabe 3b).

[3]Beweis: Übung!

Dann ist $a^k := (a_n^k)_{n\in\mathbb{N}} \in U$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und es gilt:

$$\|b - a^k\|_{l^2}^2 = \sum_{n=k+1}^{\infty} |b_n|^2 \to 0, \quad \text{für } k \to \infty,$$

weil $\|b\|_{l^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$ konvergiert. Dies zeigt, dass U dicht in $\ell^2(\mathbb{N})$ ist. Teilaufgabe a) impliziert

$$U^\perp = (\bar{U})^\perp = \ell^2(\mathbb{N})^\perp = \{0\},$$

aber $\{0\} + U = U$ spannt nicht den ganzen Raum auf, e.g. $b = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ liegt in $\ell^2(\mathbb{N}) \setminus U$.

c) Zeige mittels b) (nochmals) den **Satz von Riesz:** Sei $\Lambda\colon H \to \mathbb{R}$ eine stetige lineare Funktion. Dann existiert ein eindeutiges Element $y \in H$ so dass

$$\Lambda(\cdot) = \langle y, \cdot \rangle.$$

Hinweis: Wähle $U = \ker \Lambda$ in b).

Lösung:

Da $\{0\}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$ ist und Λ stetig und linear ist, ist

$$\ker \Lambda = \Lambda^{-1}(0)$$

ein topologisch abgeschlossener Unterraum. Insbesondere können wir b) anwenden und erhalten

$$H = \ker \Lambda \oplus \ker \Lambda^\perp.$$

Wähle ein nicht-null Vektor $v \in \Lambda^\perp$ – falls es keinen gibt, erhalten wir sofort, dass $\ker \Lambda = H$ ist, und somit $H \equiv 0$, und man ist gezwungen $p = 0$ zu wählen, wofür die gewünschte Aussage dann auch stimmt. Da $v \neq 0$ können wir v normieren und nehmen oBdA. $\|v\| = 1$ an. Für dieses v definieren wir

$$p = p(v) = \Lambda(v) \cdot v.$$

Wir behaupten, dass

$$\langle p, w \rangle = \Lambda(w), \quad \forall w \in H.$$

Dies stimmt offensichtlich für $w \in \ker \Lambda$ und $w = 0$, deshalb nehmen wir an, dass $w \in \ker \Lambda^\perp \setminus \{0\}$ gilt. Defieren

$$u_w := \Lambda(w) \cdot v - \Lambda(v) \cdot w.$$

Per Definition liegt u_w im Kern von Λ und weil $p \in \ker \Lambda^\perp$ ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \langle p, u_w \rangle \\ &= \Lambda(w)\langle p, v\rangle - \Lambda(v)\langle p, w\rangle \\ &= \Lambda(w)\Lambda(v)\underbrace{\|v\|^2}_{=1} - \Lambda(v)\langle p, w\rangle. \end{aligned}$$

Da $\Lambda(v) \neq 0$, können wir dadurch teilen und die obige Gleichung impliert

$$\Lambda(w) = \langle p, w\rangle.$$

Zu zeigen ist nurnoch, dass p eindeutig ist. Sei also $p' \in H$, so dass $\langle p', w\rangle = \Lambda(w)$ für alle $w \in H$ gilt. Dann erhalten wir

$$0 = \langle p', w\rangle - \langle p, w\rangle = \langle p' - p, w\rangle, \quad \forall w \in H.$$

Insbesondere ist $p - p' \in H^\perp = (\{0\}^\perp)^\perp = \{0\}$, siehe Teil b). Deshalb gilt $p = p'$ was Eindeutigkeit beweist und somit den Beweis vom Satz von Riesz beendet.