1) Beweise: Gilt in einem reellen normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ die Parallelogrammgleichung

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \text{für alle } x, y \in V,$$

so ist V ein Prähilbertraum, d.h. die Norm wird von einem Skalarprodukt erzeugt.

Hinweis: Definiere $\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ für alle $x, y \in V$.

Lösung:Siehe Satz 1.3.7 auf Seite 18 in

www.math.uni-leipzig.de/fachschaft/alt/dateien/skripte/fa1-schmuedgen.pdf

2) Es sei m das Lebesgue-Mass auf $(0,1)$ und $\#$ das Zählmass auf der σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen in $(0,1)$. Zeige, dass

a) $\#$ bezüglich m keine Lebesgue-Zerlegung besitzt.
Lösung:
Angenommen es gibt eine Lebesgue-Zerlegung $\# = \#_a + \#_s$ wie im Satz 5.3. Insbesondere existiert ein messbares $A \in \mathcal{A}$ mit $m(A) = 0$ und $\#_s(A^c) = 0$. Ersteres impliziert, dass A^c nicht-leer ist. Wähle $x_0 \in A^c$. Es muss gelten

$$1 = \#(\{x_0\}) = \#_a(\{x_0\}) + \#_s(\{x_0\}) = \mu_a(\{x_0\}).$$

Das Lebesguemass m verschwindet aber auf $\{x_0\}$, deshalb ist $\#_a(\{x_0\} = 0$ weil $\#_a \ll m$. Widerspruch! Deshalb hat $\#$ *keine* Lebesgue-Zerlegung bezüglich m.

b) obwohl $m \ll \#$ gilt und m beschränkt ist, existiert kein $f \in L^1(\#)$, so dass $dm = f\, d\#$.
Lösung:
Wir erinnern, dass ein Mass λ genau dann absolut stetig bzgl. eines anderen Masses μ ist, wenn "$\mu(A) = 0 \implies \lambda(A) = 0$ für alle messbaren A" gilt. Dies ist hier offensichtlich der Fall:

$$\#(A) = 0 \iff A = \varnothing \implies m(A) = 0,$$

also ist $m \ll \#$. Für die gewünschte Aussage argumentieren wir per Widerspruch. Angenommen es gäbe eine Funktion $f \in L^1(\#)$, so dass

$$m(B) = \int_B f \, d\#.$$

Dann wissen wir aus Serie 2, dass

$$f(x) = \int_{\{x\}} f \, d\# = m(\{x\}) = 0,$$

also ist $f \equiv 0$, was aber ein widerspruch ist, denn das Lebesgue Mass m *nicht* trivial ist.

NB: Dies ist kein Widerspruch zum Satz von Radon-Nikodým (cf. Theorem 5.4), weil $((0,1), \mathcal{A}, \#)$ *nicht* σ-endlich ist.

3) Sei $X = [1, \infty)$, $\mathcal{B}$ die Borel σ-Algebra von X und $\mu \colon \mathcal{B} \to [0, \infty]$ das Lebesgue-Mass. Sei $\lambda \colon \mathcal{B} \to [0, \infty]$ ein Borel-Mass mit

$$\lambda(B) = \alpha \cdot \lambda(\alpha B), \quad \forall \alpha \geq 1, \, B \in \mathcal{B}. \tag{1}$$

a) Zeige, dass $\lambda(X) < \infty$ gilt und dass es unter der zusätzlichen Annahme $\lambda \ll \mu$ eine reelle Zahl $c \geq 0$, gibt so dass

$$\lambda(B) = \int_B f \, d\mu, \; \forall B \in \mathcal{B},$$

wobei $f \colon X \to [0, \infty)$ definiert ist als $f(x) = c/x^2$.

Lösung:

Da $[1, a]$ für alle $a \geq 1$ reell kompakt ist, ist $\lambda([1, a))$ endlich und somit folgt

$$\lambda(X) = \lambda([1, a)) + \lambda([a, \infty)) \implies \lambda([a, \infty)) = \lambda(X) - \lambda([1, a)).$$

Gleichzeitig aber gilt

$$\lambda(X) - \lambda([1, a)) = \lambda([a, \infty)) = \lambda(a \cdot [1, \infty)) = \frac{\lambda(X)}{a}.$$

Da $\{[1, a + n)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine monoton wachsende Folge in $\mathcal{B}$ ist, wissen wir

$$\lambda(X) = \lim_{n \to \infty} \lambda([1, a + n)),$$

und somit erhalten wir mit der obigen Gleichung:

$$0 = \lim_{n\to\infty} \lambda(X) - \lambda([1, a+n)) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(X)}{a+n},$$

was impliziert, dass $\lambda(X) < \infty$ gelten muss. Sei nun $\lambda \ll \mu$. Da $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ein endlicher Massraum ist (insbesondere σ-endlich), können wir den Satz von Radon-Nykodým (i.e. Theorem 5.4) anwenden, das heisst, es existiert ein eindeutiges $f \in L^1(\mu)$, so dass

$$\lambda(B) = \int_B f \, d\mu, \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

gilt. Es ist zu zeigen, dass man $f(x) = c/x^2$ für ein bestimmtes $c > 0$ wählen kann. Dazu beobachten wir erstmal, dass aus (1) sofort folgt

$$\int_B f \, d\mu = \int_{\alpha \cdot B} \alpha \cdot f \, d\mu, \quad \forall \alpha \geq 1.$$

Mit dem Transformationssatz angewandt auf $h(x) = \alpha \cdot x$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_B f(x) \, d\mu(x) &= \int_{\alpha \cdot B} \alpha \cdot f(x) \, d\mu(x) \\ &= \int_B \alpha \cdot f(\alpha x) \alpha \cdot d\mu(x) \\ &= \int_B \alpha^2 f(\alpha x) \, d\mu(x). \end{aligned}$$

Aufgrund des Eindeutigkeitsaussage im Satz von Radon-Nykodým wissen wir jetzt, dass

$$f(x) = \alpha^2 f(\alpha x)$$

für fast alle $x \in X$ gilt. Wir wählen $c = f(1)$ und beobachten

$$c = f(1) = \alpha^2 f(\alpha) \implies f(\alpha) = \frac{c}{\alpha^2}, \quad \forall \alpha \geq 1.$$

Dies beendet den Beweis.

b) **Challenge:** Zeige, dass $\lambda \ll \mu$ für jedes Borel-Mass mit (1) gilt.
Lösung:
Wir behaupten, dass für jedes $0 < \varepsilon < 1$ klein genug gilt

$$\lambda([1, 1+\varepsilon)) \leq C\varepsilon,$$

mit $C > 0$ unabhängig von ε. Wir fixieren ein $k \in 2 \cdot \mathbb{N}$ so gross, dass

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k/2} < 2.$$

Die Funtioniert weil $(1+1/n)^{n/2}$ gegen $e^{1/2} < 2$ konvergiert. Wir wählen $\varepsilon = \frac{1}{k}$ und $k_0 = k/2 \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt:

$$(1+\varepsilon)^{k_0} < 2.$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\lambda([1,2)) &\geq \sum_{i=0}^{k_0-1} \lambda([(1+\varepsilon)^i, (1+\varepsilon)^{i+1})) \\
&= \sum_{i=0}^{k_0-1} \lambda((1+\varepsilon)^i \cdot [1, 1+\varepsilon)) \\
&= \sum_{i=0}^{k_0-1} \frac{1}{(1+\varepsilon)^i} \lambda([1, 1+\varepsilon)) \\
&\geq k_0 \cdot \frac{1}{(1+\varepsilon)^{k_0}} \cdot \lambda([1, 1+\varepsilon)) \\
&\geq \frac{k_0}{2} \cdot \lambda([1, 1+\varepsilon)) \\
&\geq \frac{k}{4} \cdot \lambda([1, 1+\varepsilon)).
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt also mit $C = 4 \cdot \lambda([1,2))$ die Ungleichung in der Behauptung.
Sei jetzt $[a,b)$ ein halb-offenes Interval mit $a \geq 1$, so dass $\varepsilon = b/a - 1 > 0$ klein genug ist wie in der Behauptung. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lambda([a,b)) &= \lambda(a \cdot [1, b/a)) \\
&= \frac{1}{a} \lambda([1, 1 + \underbrace{(b/a - 1)}_{=\varepsilon})) \\
&\leq \frac{C}{a}(b/a - 1) \\
&= \frac{C}{a^2}(b-a) \\
&\leq C(b-a) \\
&= C\mu([a,b)).
\end{aligned}$$

Diesselbe Gleichung gilt für beliebig grosse halb-offene Intervalle – man kann diese immer in kleine halb-offene Intervalle wie hier oben zerstückeln und dann additivität der Masse verwenden.

Also ist $\lambda \leq C \cdot \mu$ auf der Menge der halb-offenen Intervalle. Da diese aber $\mathcal{B}$ erzeugen, gilt diese Ungleichung für alle Borel Mengen. Insbesondere gilt für ein $B \in \mathcal{B}$ mit $\mu(B) = 0$:

$$\lambda(B) \leq C \cdot \mu(B) = 0,$$

was $\lambda(B) = 0$ impliziert. Dies bedeutet, dass $\lambda \ll \mu$ gilt.

4) a) Beweise:

Theorem (Satz von Egoroff)**.** *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum mit $\mu(X) < \infty$ und $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ ein Folge von messbaren Funktionen, die punktweise fast überall gegen $f \colon X \to \mathbb{R}$ konvergiert. Fixiere eine Konstante $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine messbare Menge $E \in \mathcal{A}$, so dass $\mu(X \setminus E) < \varepsilon$ gilt und $f_n\big|_E$ gleichmässig gegen $f\big|_E$ konvergiert.*

Hinweis: Definiere

$$S(n,k) := \bigcup_{m \geq n} \left\{ x \in X \,\middle|\, |f_m(x) - f(x)| \geq 1/k \right\}, \quad k,\, n \in \mathbb{N},$$

und zeige

$$\lim_{n \to \infty} \mu(S(n,k)) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Schliesse daraus, dass es eine Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$E := \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} S(n_k, k) \right)^c$$

die gewünschten Eigenschaften besitzt.

Lösung:

Für wachsendes n werden die Mengen $S(n,k)$ kleiner und sind ineinander verschachtelt. Insbesondere gilt, weil $\mu(X) < \infty$,

$$\lim_{n \to \infty} \mu(S(n,k)) = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S(n,k) \right).$$

Aber für fast jedes x gibt es ein $m(x) \in \mathbb{N}$, so dass $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ für alle $n > m(x)$, wegen der Punktweisen konvergenz. Also gilt $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S(n,k)$ für fast alle $x \in X$, insbesondere

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S(n,k) \right) = 0.$$

Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig und $n_k \in \mathbb{N}$, so dass

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{n_k} S(n,k)\right) = \mu(S(n_k,k)) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Insbesondere

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} S(n_k,k)\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^k} \leq \varepsilon,$$

und deshalb gilt für E wie im Hinweis definiert:

$$\mu(X \setminus E) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} S(n_k,k)\right) = \varepsilon.$$

Beboachte

$$E = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} S(n_k,k)^c = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n_k} \left\{ x \in X \;\middle|\; |f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \right\}.$$

Also gilt, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $m \geq n_k$ ist

$$\sup_{x\in E} |f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{k},$$

was genau heisst, dass f_n auf E gleichmässig gegen f konvergiert.

b) Zeige, dass der Satz von Egoroff nicht für σ-endliche Massräume gilt.

Lösung:

Ein Gegenbeispiel existiert auf $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, m)$: sei $f_n(x) := \chi_{[n,n+1]}(x)$. Diese Funktion konvergiert punktweise überall gegen die Null Funktion f, aber für jedes $n \in N$ gilt $\sup_{x\in[n,n+1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$, aber $[n, n+1]$ kann nicht "rausgeschnitten" werden da $m([n, n+1]) = 1$ nicht beliebig klein wird.

5) Ziel der Aufgabe ist es, den **Satz von Vitali** zu beweisen. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum. Eine Untermenge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}^1(\mu)$ heisst **gleichgradig integrierbar**, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $f \in \mathcal{F}$ und $A \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\mu(A) < \delta \implies \left| \int_A f \, d\mu \right| < \varepsilon.$$

Theorem (Satz von Vitali)**.** *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum mit $\mu(X) < \infty$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ messbar, und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(\mu)$, die gleichgradig integrierbar ist und punktweise fast überall gegen f konvergiert.*

Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| \, d\mu = 0.$$

Hinweis: Verwende die gleichgradige Stetigkeit und den Satz von Egoroff um das Integral $\int_X |f_n - f| \, d\mu$ geschickt aufzuspalten. Für einen der Terme kann Fatou's Lemma hilfreich sein.

Lösung:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $\delta > 0$ so, dass für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\mu(A) < \delta \implies \left| \int_A f_n \, d\mu \right| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Dies ist möglich aufgrund der gleichgradigen Stetigkeit der Folge f_n. Sei nun E wie in Egoroff's Theorem mit

$$\mu(X \setminus E) < \delta.$$

Definiere $A := X \setminus E$. Es gilt nun

$$\begin{aligned}\int_X |f_n - f| \, d\mu &= \int_A |f_n - f| \, d\mu + \int_E |f_n - f| \, d\mu \\ &\leq \int_A |f_n| \, d\mu + \int_A |f| \, d\mu + \mu(X) \cdot \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|.\end{aligned}$$

Da f_n gleichmässig gegen f konvergiert auf E und $\mu(X) < \infty$ gilt, geht der Term rechts gegen 0 für n gegen unendlich.

Für den ersten Term definieren wir $A_n^+ = \{f_n \geq 0\}$ und $A_n^- = \{f_n \leq 0\}$ und beobachten:

$$\int_A |f_n| \, d\mu \leq 2 \cdot \max \left\{ \int_{A_n^+} f_n \, d\mu, - \int_{A_n^-} f_n \, d\mu \right\}.$$

Wegen der Monotonie von μ gilt $\mu(A_n^\pm) \leq \mu(A) < \delta$, und deshalb impliziert die gleichgradie Stetigkeit wieder

$$\int_A |f_n| \, d\mu \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Für den mittleren Term verwenden wir Fatou's Lemma, $|f| = \lim_{n\to\infty} |f_n| = \liminf_{n\to\infty} |f_n|$ und die gleichgradige Stetigkeit:

$$\int_A |f| \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A |f_n| \, d\mu \leq \frac{\varepsilon}{8}.$$

Alles in allem haben wir gezeigt, dass

$$\int_X |f_n - f| \, d\mu \leq \varepsilon.$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, haben wir L^1 konvergenz geschlossen.