1) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $A, B \in \mathcal{A}$. Zeige, dass die folgende Gleichung gilt:
$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Lösung: Wir wissen aus Lemma 1.2, (g), dass beide Mengen $A \setminus B = A \cap B^c$ und $B \setminus A = B \cap A^c$ in $\mathcal{A}$ liegen. Wir verwenden Theorem 1.28 (ii) und berechnen

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \cup B \setminus A) = \mu(A) + \mu(B \setminus A),$$

und

$$\begin{aligned}\mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) &= \mu(B \cap A^c) + \mu(B \cap A) \\ &= \mu\left((B \cap A^c)) \cup (B \cap A)\right) \\ &= \mu(B).\end{aligned}$$

Insbesondere erhalten wir

$$\begin{aligned}\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) &= \mu(A) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B).\end{aligned}$$

$\square$

2) Es sei X eine überabzählbare Menge und definiere die σ-Algebra

$$\mathcal{A} = \left\{ A \subset X \,\middle|\, A \text{ ist höchstens abzählbar oder } A^c \text{ ist höchstens abzählbar } \right\}.$$[1]

Zeige, dass $\mu \colon \mathcal{A} \to [0, 1]$ mit

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ höchstens abzählbar,} \\ 1, & \text{sonst,} \end{cases}$$

ein Mass auf $(X, \mathcal{A})$ definiert. Welche Funktionen $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ sind $\mathcal{A}$-messbar?

[1] Siehe Serie 1, Aufgabe 1b).

***Lösung:* $\boldsymbol{\mu}$ ist eine Mass:** Es sei $(A_k)_{k\geq 1} \subset \mathcal{A}$ eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen von X. Falls alle A_k abzählbar sind, ist auch die Menge $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ abzählbar und somit gilt

$$\mu(A) = 0 = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\mu(A_k)}_{=0}.$$

Nehme nun an, dass es eine natürliche Zahl $k_0 \geq 1$ gibt, so dass A_{k_0} überabzählbar ist. Da die Folge aus paarweise disjunkten Mengen besteht, gilt $A_k \subseteq A_{k_0}^c$ für alle $k \neq k_0$, insbesondere sind alle A_k mit $k \neq k_0$ abzählbar per Wahl von A_{k_0} und Definition von $\mathcal{A}$. Ausserdem ist A überabzählbar, da $A_{k_0} \subseteq A$ und somit erhalten wir

$$1 = \mu(A) = \mu(A_{k_0}) + 0 = \mu(A_{k_0}) + \sum_{k\neq k_0} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Alle $\mathcal{A}$-messbare Funktionen: Wir behaupten, dass

$$\begin{aligned}&\big\{f\colon X \to \overline{\mathbb{R}} \,\big|\, f \text{ ist } \mathcal{A}\text{- messbar}\big\}\\ &= \big\{f\colon X \to \overline{\mathbb{R}} \,\big|\, \exists! y \in \overline{\mathbb{R}} \text{ so dass } f^{-1}(y) \in \mathcal{A} \text{ und } f^{-1}(y) \text{ überabz. ist}\big\}.\end{aligned}$$

Wir bezeichnen die linke Seite der obigen Gleichung mit L und die rechte Seite mit R. Es sei $f \in L$, wir zeigen im Folgenden, dass $f \in R$. Es sei

$$\alpha_0 := \inf\big\{\alpha \in \overline{\mathbb{R}} \,\big|\, \alpha \geq 0,\ f^{-1}([-\alpha, \alpha]) \text{ ist überabzählbar }\big\}.$$

Falls $\alpha_0 = 0$, dann ist die Menge $f^{-1}(\{0\})$ überabzählbar und in $\mathcal{A}$, da $\{0\}$ geschlossen in $\overline{\mathbb{R}}$ ist und f messbar ist. Also gilt für den Fall $\alpha_0 = 0$, dass $f \in R$. Nehme nun an $\alpha_0 > 0$. Wir behaupten, dass

$$B_0 := f^{-1}(\{-\alpha_0, \alpha_0\})$$

überabzählbar ist: sei $0 < \varepsilon < \alpha$ und beobachte, dass

$$f^{-1}[-\alpha_0, \alpha_0] = f^{-1}(\{-\alpha_0, \alpha_0\}) \cup \underbrace{\bigcup_{0<\varepsilon<\alpha} f^{-1}[-\varepsilon, +\varepsilon]}_{=f^{-1}(-\alpha_0,\alpha_0)}.$$

Falls B_0 *nicht* überabzählbar ist, dann muss $f^{-1}(-\alpha_0, \alpha_0)$ überabzählbar sein, insbesondere muss es aufgrund von Monotonie ein $0 < \varepsilon < \alpha_0$ geben, so dass $f^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon] \subseteq B_0$ überabzählbar ist. Dies widerspricht der Definition von α_0 und zeigt, dass B_0 abzählbar ist und somit das die Behauptung stimmt.

Beachte, dass die Menge $f^{-1}(\{-\alpha_0, \alpha_0\})$ die disjunkte Vereinigung von $f^{-1}(-\alpha_0)$ und $f^{-1}(\alpha_0)$ ist, also ist genau eine der Mengen $f^{-1}(-\alpha_0)$, $f^{-1}(\alpha_0)$ überabzählbar und somit $f \in R$. Dies beendet die Fallunterscheidung und zeigt, dass

$$L \subseteq R.$$

Zur Inklusion $R \subset L$: es genügt zu zeigen, dass für ein beliebiges Intervall der form $I = [-\infty, a)$, (c, d), $(b, \infty]$ gilt $f^{-1}(I) \in \mathcal{A}$. Wir machen eine Fallunterscheidung: falls $y \in I$, dann gilt

$$f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(I),$$

insbesondere ist $f^{-1}(I)^c$ abzählbar, da $f^{-1}(y)^c$ letzteres beinhaltet und abzählbar ist wegen $f^{-1}(y) \in \mathcal{A}$ und $f^{-1}(y)$ überabzählbar.

Für den Fall $y \notin I$ erhalten wir $f^{-1}(I) \cap f^{-1}(y) = \emptyset$, also gilt

$$f^{-1}(I) \subseteq f^{-1}(y)^c,$$

was wiederrum zeigt, dass $f^{-1}(I)$ abzählbar ist, und somit $f^{-1}(I) \in \mathcal{A}$. $\square$

3) Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum.

a) Es sei μ ein Mass auf $(X, \mathcal{A})$ und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Wie kann man auf natürliche Weise ein Bildmass $f_*\mu$ auf Y definieren?
Hinweis: Benutze Aufgabe 2 aus Serie 1.

Lösung: Wir definieren

$$f_*\mathcal{A} := \left\{ E \subset Y \,\middle|\, f^{-1}(E) \in \mathcal{A} \right\}$$

und

$$f_*\mu\colon f_*\mathcal{A} \to [0, +\infty], \quad E \mapsto \mu(f^{-1}(E))$$

Wegen Aufgabe 2 in Serie 1 wissen wir bereits, dass $f_*\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist. Im Folgenden zeigen wir, dass $f_*\mu$ ein Mass auf Y ist. Beachte

$$f_*\mu(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0,$$

wobei die letzte Gleichheit aus Satz 1.28 (i) folgt. Wir müssen also nur noch σ-Additivität zeigen: sei $(E_k)_{k \geq 1} \subseteq f_*\mathcal{A}$ eine Folge disjunkter Teilmengen. Die Folge $(f^{-1}(E_k))_{k \geq 1} \subset \mathcal{A}$ ist ebenfalls eine

Folge paarweise disjunkter Teilmengen. Es gilt

$$\begin{aligned} f_*\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) &= \mu\left(f^{-1}(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k)\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(E_k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(f^{-1}(E_k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f_*\mu(E_k) \end{aligned}$$

und somit haben wir auch gezeigt, dass $f_*\mu$ σ-additiv ist. $\square$

b) Es sei $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ ein Mass auf X und es sei $B \in \mathcal{A}$ eine messbare Menge. Wir definieren die Funktion $\mu\big|_B\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ via

$$A \mapsto \mu(A \cap B).$$

Zeige, dass Abbildung $\mu\big|_B$ wohldefiniert und ein Mass auf $(X, \mathcal{A})$ ist.

Lösung: Weil $A \cap B \in \mathcal{A}$ für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt, ist die Abbildung wohldefiniert. Weiterhin ist

$$\mu\big|_B(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap B) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Es sei $(A_k)_{k\geq 1} \subset \mathcal{A}$ eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen; so ist $(A_k \cap B)_{k\geq 1} \subset \mathcal{A}$ weiterhin eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen. Somit

$$\begin{aligned} \mu\big|_B\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \mu\left(B \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \cap B\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \cap B), \end{aligned}$$

also ist $\mu\big|_B$ ein Mass auf X. $\square$

4) Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $f, g\colon X \to [0, +\infty)$ messbare Funktionen. Es gelte

$$\int_A f\,d\mu \leq \int_A g\,d\mu < +\infty$$

für alle Mengen $A \in \mathcal{A}$. Zeige, dass es eine Menge $M \in \mathcal{A}$ gibt mit $\mu(M^c) = 0$ und

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{für alle } x \in M.$$

Lösung: Wegen

$$\int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu < +\infty$$

sind f, g integrierbar. Wir definieren die Menge

$$M := \left\{x \in X \,\middle|\, 0 \leq g(x) - f(x)\right\}$$

und $h := g - f$. Die Funktion h is messbar, weil es die Differenz zweier messbaren Funktionen ist. Insbesondere ist M messbear, da $M = h^{-1}([0, +\infty))$ gilt. Wir definieren

$$A_n := h^{-1}\left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right]$$

für alle $n \geq 0$ (mit der Konvention $\frac{1}{0} = +\infty$). Die Menge M^c ist die disjunkte Vereinigung der Mengen A_n. Da

$$\int_{A_n} g - f\,d\mu \leq -\frac{1}{n+1}\mu(A_n) \leq 0,$$

muss $\mu(A_n) = 0$ gelten, da ansonsten

$$\int_{A_n} g\,d\mu < \int_{A_n} f\,d\mu,$$

was nicht möglich ist nach Voraussetzung. Es gilt also

$$\mu(M^c) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n) = 0,$$

wie gewünscht.

Alternativ lässt sich die Aufgabe auch lösen indem man die Funktion $f - g$ auf M^c mit Treppenfunktionen approximiert und daraus schliesst, dass falls $\mu(M^c) > 0$, dann ist

$$\int_{M^c} f\,d\mu > \int_{M^c} g\,d\mu,$$

was der Voraussetzung widerspricht. $\square$

5) Sei $\mu\colon 2^{\mathbb{N}} \to [0,\infty]$ das Zählmass:

$$\mu(A) := \#A, \quad A \subset \mathbb{N}.$$

a) Zeige, dass für eine beliebige Funktion $f\colon \mathbb{N} \to [0,\infty]$ die Gleichung

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

gilt.

Lösung: Die Idee ist f als abzählbare Summe von Indikatorfunktionen zu schreiben. Dazu definieren wir

$$f_n\colon \mathbb{N} \to [0,\infty], \quad f_n(k) = \begin{cases} f(n), & \text{falls } k = n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}.$$

Insbesondere gilt

$$f(k) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(k), \quad k \in \mathbb{N},$$

und alle f_n sind automatisch messbar, da die σ-Algebra des Wertebereichs $\mathbb{N}$ die ganze Potenzmenge $2^{\mathbb{N}}$ ist. Die Funktionen f_n können auch als vielfache von Indikatorfunktionen aufgefasst werden:

$$f_n = f(n) \cdot \chi_{\{n\}}.$$

Wir verwenden nun Satz 1.38 und Definition 1.34:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n \, d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{N} f(n) \cdot \chi_{\{n\}} \, d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot \mu(\mathbb{N} \cap \{n\}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot \#(\{n\}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} f(n).
\end{aligned}$$

$\square$

b) Sei $f_j\colon \mathbb{N} \to [0, +\infty]$, $j \in \mathbb{N}$ eine Folge von Funktionen und

$$f(k) := \sum_{j=1}^{\infty} f_j(k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass folgende zwei Aussagen äquivalent sind:[2]

- Es gilt

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} f_j \, d\mu,$$

für eine beliebige Funktionenfolge f_j und f wie oben.

- Für eine beliebige Funktion $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to [0, +\infty]$, $(i, j) \mapsto a_{ij}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$$

Lösung: Für die " $\Longleftarrow$ "Richtung ist $f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j$ gegeben. Wir definieren

$$a_{ij} := f_j(i), \quad (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Wir berechnen mit 5a):

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} f(i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f_j(i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}.$$

Es gilt aber per Annahme,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$$

und gleichzeitig kann wieder 5a) angewendet werden

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} f_j \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} f_j(i) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

Die drei Gleichungen zusammen implizieren die gewünschte Gleichung.

Für die " $\Longrightarrow$ "Richtung definieren wir

$$f_j := \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \cdot \chi_{\{i\}} \text{ und } f := \sum_{j=1}^{\infty} f_j.$$

[2] Theorem 1.38 besagt sogar, dass die erste Aussage wahr ist. Die Aufgabe ist jedoch unabhängig davon, ob eine der beideb Aussagen wahr ist.

Wir erhalten nach zweimaliger Anwendung der Annahme:

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} f_j \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} a_{ij} \cdot \chi_{\{i\}} \, d\mu.$$

Wie im Beweis von 5a) schliessen wir

$$\int_{\mathbb{N}} a_{ij} \cdot \chi_{\{i\}} \, d\mu = a_{ij},$$

und somit

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

Ausserdem gilt

$$f(k) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(k) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \cdot \chi_{\{i\}}(k) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}$$

Definiere nun

$$g_i := \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \cdot \chi_{\{i\}} \text{ und } g := \sum_{i=1}^{\infty} g_i.$$

Es gilt

$$g(k) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \cdot \chi_{\{i\}}(k) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} = f(k),$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, insbesondere

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \int_{\mathbb{N}} g \, d\mu.$$

Zweifaches Anwenden der Annahme auf g und das analoge Argument zum ersten Teil gibt

$$\int_{\mathbb{N}} g \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} g_i \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}.$$

Dies zusammen mit den Gleichung oben beendet den Beweis für die "$\Longrightarrow$"Richtung.

$\square$