1) Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum. Zeige:

a) Für (A_k) eine Folge messbarer Mengen gilt

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Lösung: Zuerst zeigen wir die Aussage für endliche Vereinigungen per Induktion: für $A_1,\ A_2 \in \mathcal{A}$ wissen wir aus Serie 2, Aufgabe 1:

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2).$$

Angenommen die Aussage stimmpt für $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Dann erhalten wir ähnlich wie zuvor und mit der Induktionsannahme:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) \leq \mu(A_{n+1}) + \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \mu(A_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_k).$$

Dies beendet den Induktionsbeweis für endliche Vereinigungen. Definiere jetzt

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

Dann gilt

$$E_n \subseteq E_{n+1} \text{ und } \bigcup_{n=1}^{m} E_n = \bigcup_{k=1}^{m} A_k = E_m.$$

Mithilfe von Satz 1.28 (iv) und der Induktion von oben erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).
\end{aligned}$$

$\square$

b) Für (A_k) eine Folge messbarer Mengen mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < +\infty$, liegen fast alle Punkte $x \in X$ in höchstens endlich vielen A_k.

Lösung: Definiere

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{l=k} A_l}_{=:B_k} .$$

Die Menge F beschreibt alle Elemente $x \in X$, die in unendlich vielen A_k liegen. Falls wir also $\mu(F) = 0$ zeigen können, sind wir fertig.

Wir wissen, dass $B_k \in \mathcal{A}$, $B_{k+1} \subseteq B_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und

$$\mu(B_1) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < +\infty$$

mithilfe von 1.a) und der zusätzlichen Annahme. Insbesondere ist Satz 1.28 (v) anwendbar und liefert zusammen wir 1.a)

$$\mu(F) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{l=k}^{\infty} \mu(A_k).$$

Da aber $\sum_{l=1}^{\infty} \mu(A_k) < \infty$ gilt, muss der obige Limes gegen 0 streben, was $\mu(F) = 0$ beweist.

□

2) Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $f \in L^1(\mu)$ eine integriarbare Funktion. Beweise folgende Aussage:

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \delta$ folgende Ungleichung gilt:

$$\int_A |f|\, d\mu < \varepsilon.$$

Lösung: Falls $f = 0$, dann ist die Aussage richtig, also oBdA nehmen wir $f \neq 0$ an. In einer Fallunterscheidung nehmen wir zuerst an, dass die Funktion f beschränkt ist, i.e.

$$M := \max_{x\in X} |f(x)| < \infty.$$

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben und$A \in \mathcal{A}$. Aus der Monotonie des Integrals folgt

$$\int_A |f|\, d\mu \leq \int_A M\, d\mu = M\mu(A).$$

Insbesondere kann in diesem Fall $\delta = \varepsilon/2M$ gewählt werden.

Es sei nun f unbeschränkt. Wir definieren

$$f_k(x) = \min\{k, |f(x)|\},\ x \in X, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Die Folge f_k konvergiert Punktweise gegen f und erfüllt $f_k \leq f_{k+1}$. Mithilfe des Satzes über monotone Konvergenz (Satz 1.37) erhalten wir

$$\int_A |f| = \int_X \chi_A |f| = \lim_{k\to+\infty} \int_X \chi_A f_k = \lim_{k\to\infty} \int_A f_k$$

Man wähle nun $l \geq 1$, so dass

$$\int_A |f| - \int_A f_l < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{für alle } k \geq l.$$

Weil f_l beschränkt ist, wissen wir, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$\int_A f_l\, d\mu < \frac{\epsilon}{2},$$

falls $\mu(A) < \delta$. Zusammengefasst erhalten wir

$$\int_A |f|\, d\mu < \frac{\epsilon}{2} + \int_A f_l\, d\mu < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

falls $\mu(A) < \delta$, was zu zeigen war.

$\square$

3) In dieser Aufgabe gilt es folgendes Theorem auf zwei verschieden Arten zu beweisen:

Theorem. *Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $f_k \colon X \to [0, \infty)$ eine Folge messbarer positiver Funktionen, so dass*

$$f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq 0.$$

Sei $f \colon X \to [0, \infty]$ der punktweise Grenzwert von f_k. Falls $f_1 \in L^1(\mu)$ ist, dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k\, d\mu = \int_X f\, d\mu.$$

a) Zeige das obige Theorem mithilfe des Satzes über monotone Konvergenz.

Lösung: Definiere $g_k = f_1 - f_k$. Man sieht, dass g_k eine Folge von positiven messbaren Funktionen definiert und sei g der Punktweise Limit. Der Satz der monotonen Konvergen (Satz 1.37) ist anwendbar und liefert zusammen mit der Linearität des Integrals

$$\begin{aligned}\int_X f_1\,d\mu - \int_X f\,d\mu &= \int_X f_1 - f\,d\mu \\ &= \int_X g\,d\mu \\ &= \lim_{k\to\infty}\int_X g_k\,d\mu \\ &= \lim_{k\to\infty}\int_X f_1 - f_k\,d\mu \\ &= \int_X f_1\,d\mu - \lim_{k\to\infty}\int_X f_k\,d\mu.\end{aligned}$$

Die L^1-Bedingung impliziert, dass $\int_X f_1\,d\mu$ endlich ist, insbesondere sind auch alle $\int_X f_k\,d\mu$ endlich (wegen Monotonie des Integrals und $f_1 \geq f_k \geq 0$) und wir können die gewohnten Äquivalenzumformungen verwenden um aus der obigen Gleichung

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{k\to\infty}\int_X f_k\,d\mu$$

zu schliessen.

Bemerkung 1: Wie dieser Beweis klar macht, können die Funktionen f_k auch den Wert ∞ annehmen und die Aussage plus Beweis bleiben unverändert.

$\square$

b) Zeige das obige Theorem mithilfe des Satzes über die majorisierte Konvergenz.

Lösung: Das obige Theorem folgt sofort aus dem Satz über die majorisierte Konvergenz (Satz 1.45) mit Majorante $g = f_1$.

Bemerkung 2: Für den Beweis des Theorems mit $f_k \colon X \to [0, \infty]$ kann man Satz 1.45 nicht direkt anwenden. Man kann aber folgenden nützlichen Trick anwenden, um die stärkere Version zu zeigen:[1] definiere

$$A_k := \left\{ x \in X \;\middle|\; f_k(x) \neq \infty \right\},\ A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

[1] Vergleiche mit Lemma 1.47 im Skript.

Da f_1 in $L^1(\mu)$ liegt, sind auch alle f_k in $L^1(\mu)$ aufgrund der Monotonie des Integrals und der Eigenschaft $f_1 \geq f_k \geq 0$. Insbesondere gilt

$$\infty > \int_X f_k \, d\mu \geq \int_{X \setminus A_k} f_k \, d\mu = \mu(X \setminus A_k) \cdot \infty.$$

Per Konvention muss also $\mu(X \setminus A_k) = 0$ gelten. Mit Aufgabe 1.a) schliessen wir

$$\mu(X \setminus A) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} X \setminus A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X \setminus A_k) = 0$$

und somit erhalten wir

$$\int_A f_k \, d\mu = \int_X f_k \, d\mu, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Da jede Funktion f_k auf A den Wert ∞ *nicht* annimmt, können wir

$$\tilde{f}_k \colon X \to [0, \infty), \ \tilde{f}_k(x) := \begin{cases} \tilde{f}_k(x) = f_k(x), & \text{falls } x \in A, \\ \tilde{f}_k(x) = 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

setzten und Satz 1.45 mit $g = \tilde{f}_1$ anwenden. Definiere $\tilde{f}$ als den punktweisen Grenzwert von $\tilde{f}_k$ – beobachte, dass $\tilde{f}$ mit f auf A übereinstimmt. Ausserdem verändern sich sämtliche Integrale nicht, da $\mu(X \setminus A) = 0$, und somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{k \to \infty} \int_X f_k \, d\mu &= \lim_{k \to \infty} \int_X \tilde{f}_k \, d\mu \\ &= \int_X \tilde{f} \, d\mu \\ &= \int_X f \, d\mu. \end{aligned}$$

$\square$

c) Finde ein Gegenbeispiel zur Schlussfolgerung im obigen Theorem, wenn die Annahme $f_1 \in L^1(\mu)$ *nicht* erfüllt ist.

Lösung: Es sei $f_k \colon \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$ die charakteristische Funktion der Menge

$$A_k := \{-k, \ldots, 0, \ldots, k\}^c.$$

Es sei $\mu_{\mathbb{Z}}$ das Zählmass auf $\mathbb{Z}$. Beachte, dass $f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq 0$ und $f_k \to f := 0$ (Nullfunktion) punktweise mit $k \to +\infty$. Weiterhin gilt

$$\int_{\mathbb{Z}} |f_k| \, d\mu_{\mathbb{Z}} = \infty$$

für alle $k \geq 1$. Aber

$$0 = \int_X f \, d\mu_{\mathbb{Z}} \neq \lim_{k \to +\infty} \int_{\mathbb{Z}} |f_k| \, d\mu_{\mathbb{Z}} = \infty,$$

was eben zeigt, dass die Voraussetzung $f_1 \in L^1(\mu)$ im Allgemeinen *nicht* weggelassen werden kann. $\square$

4) Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Massraum, i.e.

$$\mu(X) < +\infty.$$

Sei $f_k \colon X \to \mathbb{R}$ eine Folge beschränkter messbarer Funktionen, die gleichmässig gegen ein $f \colon X \to \mathbb{R}$ konvergiert. Beweise oder widerlege die Aussage:

"Die Funktion f ist messbar und es gilt

$$\lim_{k \to +\infty} \int_X f_k \, d\mu = \int_X f \, d\mu."$$

Was geschieht im Allgemeinen falls $\mu(X) = \infty$?

Lösung: Da gleichmässige Konvergenz punktweise Konvergenz impliziert, ist insbesondere f messbar. Desweiteren ist die Funktion f beschränkt, weil die Folge der f_k's gleichmässig gegen f konvergiert und jedes f_k beschränkt ist.[2] Weil $\mu(X) < +\infty$, folgt $f \in L^1(\mu)$. Es existert also ein $k_0 \geq 1$, so dass

$$\sup_{x \in X} |f_k(x) - f(x)| < 1 \quad \text{für alle } k \geq k_0.$$

Es sei

$$M_0 := \max \bigl\{ |f_k(x)| \bigm| x \in X, 1 \leq k \leq k_0 \bigr\}.$$

Wir definieren die Funktion $g \colon X \to \mathbb{R}$ via

$$x \mapsto M_0 + 1 + \max \bigl\{ |f(x)| \bigm| x \in X \bigr\}.$$

[2] Vergleiche dies mit dem Resultat aus der Analysis I: der Raum der reelwertigen beschränkten Funktionen mit der Supremumsnorm ist ein Banachraum.

Da $\mu(X) < \infty$ gilt, ist g integrierbar und es gilt $|f_k| \leq g$ für alle $k \geq 1$. Somit können wir den Satz von der majorisierten Konvergenz (Satz 1.45) anwenden und erhalten

$$\lim_{k \to +\infty} \int_X f_k \, d\mu = \int_X f \, d\mu,$$

wie gefordert.

Falls $\mu(X) = \infty$, dann ist die Aussage im Allgemeinen *nicht* mehr richtig. Betrachte $(\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{Z}}, \mu_{\mathbb{Z}})$ wobei $\mu_{\mathbb{Z}}$ das Zählmass auf $\mathbb{Z}$ bezeichnet. Wir definieren für alle $k \geq 1$ die Funktion $f_k \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ via

$$f_k(n) := \begin{cases} \frac{1}{|n|} & , \text{ falls } |n| \geq k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beobachte, dass f_k gleichmässig gegen die Nullfunktion konvergiert. Weil die harmonische Reihe divergiert, gilt

$$\int_{\mathbb{Z}} f_k \, d\mu_{\mathbb{Z}} = 2 \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

und somit

$$\infty = \lim_{k \to +\infty} \int_{\mathbb{Z}} f_k \, d\mu_{\mathbb{Z}} \neq \int_{\mathbb{Z}} f \, d\mu_{\mathbb{Z}} = 0.$$

$\square$

5) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und

$$f = u + iv \colon X \to \mathbb{C}$$

eine Funktion. Wir betrachten $\mathbb{C}$ als messbaren Raum ausgestattet mit der Borel σ-Algebra.

a) Zeige, dass f messbar ist genau dann wenn $u = \mathrm{Re}(f)$ und $v = \mathrm{Im}(f)$ messbar sind.

Lösung: Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ sind homöomorph (i.e. isomorph als topologische Räume), wobei $a + ib \mapsto (a, b)$ einen solchen Homöomorphismus beschreibt. Betrachten wir also f als eine Funktion der Form

$$f \colon X \to \mathbb{R}^2, \; x \mapsto (u(x), v(x)).$$

Aufgrund der Definition der σ-Borel Algebra und Serie 1, Aufgabe 3, ist es hinreichend mit Quadern zu arbeiten, i.e. f ist messbar, genau dann wenn für jedes offene Rechteck $U := (a,b) \times (c,d)$ gilt $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$. Letzteres ist äquivalent zu

$$u^{-1}(a,b),\, v^{-1}(c,d) \in \mathcal{A}.$$

Da aber offene Intervalle die Borel σ-Algebra von $\mathbb{R}$ erzeugen, ist dies wiederrum äquivalent zur Aussage, dass u, $v\colon X \to \mathbb{R}$ messbar sind. $\square$

b) Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{C}$ heisst integrierbar, falls

$$\int_X |f|\, d\mu < \infty$$

gilt. Zeige, dass f wie oben integrierbar ist genau dann wenn u und v integrierbar sind.

Lösung: Für eine komplexe Zahl $a + bi \in \mathbb{C}$ gilt

$$|a|,\, |b| \le |a + bi| \le |a| + |b|.$$

Wir erhalten also

$$\int_X |f|\, d\mu < \infty \implies \int_X |u|\, d\mu < \infty \text{ und } \int_X |v|\, d\mu < \infty$$

und

$$\begin{aligned}\int_X |u|\, d\mu < \infty \text{ und } \int_X |v|\, d\mu < \infty &\implies \int_X |u| + |v|\, d\mu < \infty \\ &\implies \int_X |f|\, d\mu < \infty.\end{aligned}$$

Diese zwei Ungleichungen und Teil a) implizieren die gewünschte Aussage.

$\square$

c) Für eine messbare Funktion f wie oben definieren wir

$$\int_X f\, d\mu := \int_X u\, d\mu + i \int_X v\, d\mu.$$

Zeige:

i)

$$\left| \int_x f\, d\mu \right| \le \int_X |f|\, d\mu$$

und

ii)
$$\int_X f + c \cdot g \, d\mu = \int_X f \, d\mu + c \cdot \int_X g \, d\mu,$$
für alle integrierbaren Funktionen f, $g \colon X \to \mathbb{C}$.

Lösung: Für i) beobachte wir

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| = \left| \int_X u \, d\mu + i \int_X v \, d\mu \right|.$$

OBdA können wir Annehmen, dass beide Integrale von u und v endlich sind (i.e. dass u, v integrierbar sind wegen Teil a) und Messbarkeit von f), ansonsten ist die gewünschte Aussage trivial. Mit der Dreiecksungleichung und ein Argument wie in Teil b) folgt

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \left| \int_X u \, d\mu \right| + \left| \int_X v \, d\mu \right|.$$

Jetzt wenden wir Satz 1.44 (iii) auf u und v an, und erhalten mit der linearität des Integrals (i.e. Satz 1.44 (i))

$$\begin{aligned} \left| \int_X u \, d\mu \right| + \left| \int_X v \, d\mu \right| &\leq \int_X |u| \, d\mu + \int_X |v| \, d\mu \\ &= \int_X |f| \, d\mu. \end{aligned}$$

Diese zwei Ungleichungen beenden den Beweis von Teil i).

Für Teil ii) schreiben wir $g = a + ib$ und wenden die “herkömmliche” Linearität an (Satz 1.44 (i)):

$$\begin{aligned} \int_X f + c \cdot g d\mu &= \int_X (u + ca) + i(v + cb) \, d\mu \\ &= \int_X u + a \, d\mu + i \int_X v + cb d\mu \\ &= \int_X u \, d\mu + c \int_X a \, d\mu + i \int_X v \, d\mu + ic \int_X b \, d\mu \\ &= \left(\int_X u \, d\mu + i \int_X v \, d\mu \right) + c \left(\int_X a \, d\mu + i \int_X b \, d\mu \right) \\ &= \int_X f \, d\mu + c \int_X g \, d\mu. \end{aligned}$$

□