1) Es sei $(X, \mathcal{A})$ eine messbarer Raum und $\mu_n \colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ eine Folge von Massen.

a) Zeige, dass
$$\mu(A) := \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A), \quad A \in \mathcal{A}$$
ein Mass auf $(X, \mathcal{A})$ definiert.

Lösung: Da
$$\mu_n(\emptyset) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$
haben wir auch $\mu(\emptyset) = 0$. Sei nun (A_i) eine Folge paarweiser disjunkten Mengen in $\mathcal{A}$. Mithilfe von Theorem 1.38 und Serie 2, Aufgabe 5b), können die Summationen im folgenden vertauscht werden:
$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \end{aligned}$$
Somit ist μ ein Mass.

$\square$

b) Sei $f \colon X \to \mathbb{R}$ messbar. Zeige, dass f μ-integrierbar ist, i.e.
$$\int_X |f| \, d\mu < \infty,$$
genau dann wenn
$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f| \, d\mu_n < \infty.$$

Lösung: Wir zeigen die “ $\Longrightarrow$ ”Richtung: wir wissen aus der Vorlesung, dass f integrierbar ist, genau dann wenn f^+ und f^- integrierbar sind. Wir arbeiten zuerst mit f^+: sei $s_k \colon X \to [0, \infty]$ eine wachsende Folge von Treppenfunktionen mit $s_k \leq f^+$, so dass
$$\lim_{k \to \infty} \int_X s_k \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu,$$

cf. Theorem 1.26.
Für jede Treppenfunktion $s = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{A_i}$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_X s \, d\mu &= \sum_{i=1}^m a_i \mu(A_i) \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{n=1}^\infty a_i \mu_n(A_i) \\
&= \sum_{n=1}^\infty \sum_{i=1}^m a_i \mu_n(A_i) \\
&= \sum_{n=1}^\infty \int_X s \, d\mu_n.
\end{aligned}$$

Insbesondere

$$\int_X f^+ \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^\infty \int_X s_k \, d\mu_n.$$

Wir behaupten, dass der Limes und die Summe vertauscht werden können – definiere dazu $g,\ g_k \colon \mathbb{N} \to [0,\infty]$

$$g_k(n) := \int_X s_k \, d\mu_n,\ g(n) := \lim_{k\to\infty} g_k(n)$$

und beobachte

$$\sum_{n=1}^\infty \int_X s_k \, d\mu_n = \sum_{n=1}^\infty g_k(n) = \int_{\mathbb{N}} g_k \, d\#,$$

Serie 2, Aufgabe 5a). Aufgrund der Annahme an s_k erhalten wir $g_k \le g_{k+1}$, und somit kann der Satz über monotone Konvergenz angewendet werden (zusammen mit 5a)):

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_X s_k \, d\mu_n &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{N}} g_k \, d\# \\
&= \int_{\mathbb{N}} \lim_{k\to\infty} g_k \, d\# \\
&= \int_{\mathbb{N}} g \, d\# \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} g(n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{k\to\infty} \int_X s_k \, d\mu_n.
\end{aligned}
$$

Jetzt können wir erneut die monotone Konvergenz auf $s_k \leq s_{k+1}$ anwenden für jedes μ_n, und da f^+ der punktweise Limit von s_k ist, erhalten wir insgesamt

$$
\infty > \int_X f^+ \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_X s_k \, d\mu_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f^+ \, d\mu_n.
$$

Das Symmetrische Argument zeigt auch

$$
\infty > \int_X f^- \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f^- \, d\mu_n.
$$

Es gilt aber

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f| \, d\mu_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{\int_X f^+ \, d\mu_n}_{=g(n)} + \underbrace{\int_X f^- \, d\mu_n}_{=:h(n)} \right).
$$

Die zwei Ungleichungen oben besagen, dass g, $h \in L^1(\#)$ gilt, und mit Theorem 1.44 (i) schliessen wir also

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f| d\, \mu_n < \infty.
$$

Die " $\Longleftarrow$ "Richtung folgt sofort: wir haben erst am Ende die L^1-Bedingungen verwendet, das heisst alle vorherigen Gleichungen gelten auch hier. Insbesondere gilt auch

$$
\int_X |f| d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f| d\mu_n.
$$

Die Annahme besagt, dass die rechte Seite endlich ist, womit also auch die linke Seite endlich ist, was zu zeigen war.

$\square$

c) Sei f μ-integrierbar. Zeige, dass

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f \, d\mu_n.$$

Lösung: Die Aufgabe wurde bereits für $f^{\pm}$ in Teil b) gelöst, was zusammen mit Theorem 1.44 (i) die Allgemeine Formel beweist.

$\square$

2) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Massraum. Zeige, dass $(X, \mathcal{A}, \mu)$ seine eigene Vervollständigung ist.

Lösung: Aufgrund der Definition wissen wir bereits, dass $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$. Für ein Element $E \in \mathcal{A}^*$ gibt es $A, B \in \mathcal{A}$, so dass

$$A \subseteq E \subseteq B, \text{ und } \mu(B \setminus A) = 0.$$

Insbesondere erhalten wir

$$\mu(E \setminus A) = 0,$$

da $E \setminus A \subseteq B \setminus A$ gilt. Aber $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist vollständig, und somit schliessen wir $E \setminus A \in \mathcal{A}$ und weil A bereits in $\mathcal{A}$ liegt, erhalten wir

$$E = (E \setminus A) \cup ((E \setminus A)^c \cap A) \in \mathcal{A},$$

was somit die Inklusion $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{A}$ zeigt. Insgesamt gilt also $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$. Die Eindigkeutigkeit des vervollständigten Masses μ^* erzwingt dann die Gleichung $\mu^* = \mu$, da $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ gilt. Dies beendet den Beweis.

$\square$

3) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein beliebiger Massraum, $(X, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ seine Vervollständigung und $(X, \mathcal{B}, \nu)$ ein vollständiger Massraum, so dass $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ und $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu$. Zeige, dass dann $\mathcal{A}^* \subset \mathcal{B}$ und $\nu|_{\mathcal{A}^*} = \mu^*$ gilt.

Lösung: Für die Inklusion: sei $E \in \mathcal{A}^*$. Dann exisiteren $A,\ B \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, so dass $A \subseteq E \subseteq B$ und $\mu(B \setminus A) = 0$. Da aber $B \setminus A$ in $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ liegt erhalten wir per Annahme an ν:

$$\nu(B \setminus A) = \mu(B \setminus A) = 0.$$

Vollständigkeit von $(X, \mathcal{B}, \nu)$ impliziert also, dass $E \setminus A \subseteq B \setminus A$ in $\mathcal{B}$ liegt. Das gleiche Argument wie in Aufgabe 2 zeigt dann, dass E in $\mathcal{B}$ liegt, was die gewünschte Inklusion beweist.

Für die Massgleichheit beobachten wir erstmal, dass $\nu\big|_{\mathcal{A}}^* \colon \mathcal{A}^* \to [0, \infty]$ ein Mass ist, cf. Serie 2, Aufgabe 3b). Aber gleichzeitig gilt

$$\left(\nu\big|_{\mathcal{A}^*}\right)\big|_{\mathcal{A}} = \nu\big|_{\mathcal{A}} = \mu.$$

Die Eindeutigkeit aus Theorem 1.55 (ii) impliziert also

$$\nu\big|_{\mathcal{A}^*} = \mu^*.$$

$\square$

4) a) Beschreibe jeweils explizit die Vervollständigung $(X, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ der folgenden Massräume $(X, \mathcal{A}, \mu)$:

i) X eine beliebige Menge, $\mathcal{A} \subseteq X$ eine σ-Algebra und μ das Zählmass,

Lösung: Der Massraum $(X, \mathcal{A}, \#)$ ist bereits vollständig: eine Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $\#A = 0$ muss die leere Menge sein. Damit ist die Eigenschaft eines vollständigen Massraums (trivialerweise) gegeben und mit Aufgabe 2 schliessen wir, dass $(X, \mathcal{A}, \#)$ die Vervollständigung von sich selber ist. $\square$

ii) $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ die Borel σ-Algebra und $\mu = \delta_0$ und das Dirac Mass bei $0 \in \mathbb{R}$,

Lösung: Wir behaupten, dass $\mathcal{A}^* = 2^{\mathbb{R}}$ und $\delta_0^* = \delta_0$ gilt. Sei $E \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige Menge die 0 *nicht* enthält. Da $\emptyset$ und $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ offen sind, sind sie in $\mathcal{A}$ enthalten, aber es gilt

$$\emptyset \subseteq E \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \delta_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = 0.$$

Insbesondere $E \in \mathcal{A}^*$. Aber $\mathcal{A}^*$ ist eine σ-Algebra die $\mathcal{A}$ enthält, insbesondere ist auch $E \cup \{0\}$ in $\mathcal{A}^*$. Dies zeigt, dass jede beliebige Teilmenge $F \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathcal{A}^*$ enthalten ist. Ausserdem ist δ_0 auf $2^{\mathbb{R}}$ immernoch ein Mass, und aus der Eindeutigkeit folgt also auch $\delta_0^* = \delta_0$. $\square$

iii) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ wie in Serie 2, Aufgabe 2).

Lösung: Wie in i) behaupten wir, dass der gegebene Massraum bereits vollständig ist. Tatsächlich gilt $E \subseteq N$ mit $N \in \mathcal{A}$ und $\mu(N) = 0$ genau dann wenn N höchstens abzählbar ist. Dann ist aber E auch höchstens abzählbar und liegt dann per definition in $\mathcal{A}$. □

b) Beschreibe jeweils explizit die $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ Räume für i), ii), iii). Verifiziere für ii), dass $L^1(X, \mathcal{A}, \mu) \cong L^1(X, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ gilt.

Lösung: Für i) ist f in $\mathcal{L}^1(\#)$ genau dann wenn $f\colon X \to \mathbb{R}$ messbar ist und eine "absolut konvergente Folge"darstellt: das selbe Argument wie in Serie 2 Aufgabe 5a) zeigt

$$\int_X |f|\, d\# = \sum_{x \in X} |f(x)|,$$

aber damit so eine Reihe konvergiert kann f nur an höchstens abzählbar vielen x verschieden von Null sein.[1] Insbesondere stellt f eine absolute konvergente Folge dar. Da das Zählmass an jedem Punkt ungleich 0 ist, gilt $f \sim g$ genau dann wenn $f = g$.

Für ii) ist $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \delta_0)$ der Raum (der Äquivalenzklassen) von messbaren Funktionen, da $\int_{\mathbb{R}} |f| d\delta_0 = |f(0)| < \infty$ für jede messbare Funktion gilt. Insbesondere ist $L^1(\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}}, \delta_0^*)$ der Raum (aller Äquivalenzklassen) aller Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (!!!). In beiden Räumen gilt $f \sim g$ genau dann wenn $f(0) = g(0)$, insbesondere können beide $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \delta_0)$ und $L^1(\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}}, \delta_0^*)$ via $[f] \mapsto f(0) \in \mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}$ identifiziert werden. Mit dieser Beschreibung entspricht die Abbildung (1.45) der Identität auf $\mathbb{R}$.

Für iii) beobachten wir, dass das Analogon zu Musterlösung Serie 2, Aufgabe 2) besagt, dass $f\colon X \to \mathbb{R}$ messbar ist, falls es ein $y \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $f^{-1}(y) \in \mathcal{A}$ überabzählbar ist und $f^{-1}(y)^c$ ist abzählbar. Insbesondere ist f bis auf eine Nullemenge (nämlich $f^{-1}(y)^c$) konstant. Ausserdem gilt $\mu(f^{-1}(y)) = 1$ und wir erhalten

$$\int_X |f|\, d\mu = |f(y)| < \infty.$$

Der Raum $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ besteht also aus allen (Äquivalenzklassen von) messbaren Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$, die widerrum als Funktionen aufgefasst werden können, die bis auf eine abzählbare Menge konstant sind. Letztere Menge ist eine Nullmenge (wie zuvor beobachtet) und somit kann L^1 wieder mit $\mathbb{R}$ identifiziert werden.

□

[1] Siehe hier.

5) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $f \overset{\mu}{\sim} g$ definiert wie in (1.35) im Skript.

a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Lösung: Es ist klar, dass $f \sim f$ gilt, da $f(x) = f(x)$ und $\mu(\emptyset) = 0$. Symmetrie ist ebenfalls klar da die entsprechende Nullmenge unverändert bleibt. Seien also $f \sim g$ und $g \sim h$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\{x \in X, \mid f(x) \neq h(x)\} &\subseteq \{x \in X, \mid f(x) \neq h(x) \text{ und } f(x) \neq g(x)\} \\ &\quad \cup \{x \in X, \mid f(x) = g(x) \text{ und } g(x) \neq h(x)\} \\ &\subseteq \{x \in X, \mid f(x) \neq g(x)\} \cup \{x \in X, \mid g(x) \neq h(x)\}.\end{aligned}$$

Letzteres ist eine Vereinigung von Nullmengen, insbesondere gilt dann mit der Monotonie-Eigenschaft, dass auch $\{x \in X, \mid f(x) \neq h(x)\}$ eine Nullmenge ist. Insbesondere gilt $f \sim h$ und somit ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation. $\square$

b) Seien $f,\, g \colon X \to [0, \infty]$ μ-integrierbar mit

$$\int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Zeige, dass $f = g$ fast überall (i.e. $f \overset{\mu}{\sim} g$) gilt.

Lösung: Da f, g integrierbar sind, ist auch $h := f - g$ integrierbar. Aufgrund der Linearität des Integrals, wissen wir, dass

$$\int_A h \, d\mu = 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

gilt. Aus Lemma 1.49 folgt jetzt aber, dass $h \equiv 0$ fast überall gilt. Insbesondere ist $f \equiv g$ fast überall, was zu zeigen wahr. $\square$

c) Gilt die Aussage in b) auch für messbare Funktionen, die nicht zwingend integrierbar sind? Begründe deine Antwort.

Lösung: Die Aussage gilt nicht – sei $X = \{x\}$ und $\mathcal{A} := \{\emptyset, X\}$ und definiere

$$\mu(\emptyset) = 0, \ \mu(X) = \infty.$$

Dann sind die konstanten Funktionen $f(x) = 1$, $g(x) = 2$ von X nach $[0, \infty]$ messbar und

$$\int_{\emptyset} f \, d\mu = \int_{\emptyset} g \, d\mu = 0,$$

$$\int_X f \, d\mu = 2 \cdot \mu(X) = \infty = 1 \cdot \mu(X) = \int_X g \, d\mu.$$

Aber f ist nicht äquivalent zu g, da $\{x \in X \,|\, f(x) \neq g(x)\} = X$, was keine Nullmenge ist.

$\square$