1) Beweise die folgende Aussage: Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Lebesgue Nullmenge genau dann, wenn eine Folge $(Q_k)_{k\geq 1}$ von Quadern in $\mathbb{R}^n$ existiert, so dass

   1. $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(Q_k) < +\infty$.
   2. Jeder Punkt von A liegt in unendlich vielen der Quader Q_k.

Lösung: " $\Longrightarrow$" Es sei A eine Lebesgue Nullmenge. Weil A eine Lebesgue Nullmenge ist, existiert für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ eine Überdeckung $A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} Q_{(k,n)}$ von A mit kompakten Quadern $Q_{(k,n)}$ so dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(Q_{(k,n)}) < \frac{1}{2^n},$$

cf. Definition 2.8. Es sei $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine surjektive Abbildung. Wir definieren $Q_k := Q_{\phi(k)}$. Beachte,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(Q_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(Q_{(k,n)}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

und nach Konstruktion liegt jedes $x \in A$ in unendlich vielen Quadern Q_i, was zu zeigen war.

"$\Longleftarrow$" Es sei Q_k eine Folge von Quadern welche Bedingung 1. und Bedingung 2. erfüllt. Für jedes $\epsilon > 0$ existert ein $N \geq 1$ so dass

$$\sum_{k=N}^{\infty} \mathrm{Vol}(Q_k) < \epsilon.$$

Weil jedes $x \in A$ in unendlich vielen Q_k's liegt, folgt $A \subset \bigcup_{k=N}^{\infty} Q_k$, und wir haben dadurch gezeigt, dass A eine Lebesgue Nullmenge ist.

$\square$

2) Es sei $\Omega := [0,1]$ das abgeschlossene Einheitsintervall versehen mit der Standardtopologie und $A \subset \Omega$ eine Teilmenge. Weiter bezeichne ν das äussere Lebesgue Mass auf Ω. Beweise oder widerlege jeweils folgende Aussagen:

i) Ist A nirgends dicht, so gilt $\nu(A) = 0$.

ii) Ist $\nu(A) = 0$, so ist A nirgends dicht.

iii) Ist A dicht, so gilt $\nu(A) > 0$.

iv) Ist $\nu(A) > 0$, so existiert ein nichtleeres, offenes Intervall $I \subset [0,1]$, in welchem $A \cap I$ dicht liegt.

v) Ist $\nu(A) = 1$, so ist A dicht in $[0,1]$.

Lösung: Wir widerlegen i): Enumeriere $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und definieren

$$I_n := \left(q_n - \frac{1}{2^{n+1}}, q_n + \frac{1}{2^{n+1}}\right), \quad n \geq 1, \quad A := [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Die Teilmenge A ist abgeschlossen und nach Konstruktion nirgends dicht (weil $q_k \notin A$ für alle $k \geq 1$). Weiterhin gilt

$$\nu(A) \geq \nu([0,1]) - \sum_{n=1}^{\infty} \nu(I_n) \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Dies widerlegt die Aussage.

Wir widerlegen ii): Es sei $\{q_n\}$ wie oben und definiere

$$Q_k^{(\epsilon)} := \left(q_k - \frac{\epsilon}{2^n}, q_k + \frac{\epsilon}{2^n}\right).$$

Es gilt

$$\nu(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \nu(Q_k^{(\epsilon)}) = \epsilon$$

für alle $\epsilon > 0$ und deshalb $\nu(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$. Die Teilmenge $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ ist dicht und also insbesondere nicht nirgends dicht. Dies widerlegt die Aussage.

Wir widerlegen iii): die Megen $A := \mathbb{Q} \cap [0,1]$ ist offensichtlich dicht in Ω, aber wie in ii) gesehen gilt $\nu(A) = 0$.

Wir widerlegen iv): Es bezeichne $A := [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$ die Menge aus Teilaufgabe i). Wir wissen bereits, dass $\nu(A) > 0$. Weiters, sei $(a,b) \subset \Omega$ ein nichtleeres Intervall. Es existert somit eine rationale Zahl $q_k \in (a,b)$.

Weil (a,b) offen ist, gibt es ein offenes nichtleeres Intervall J so dass $q_k \in J \subset (a,b)$ and $J \subset I_k$. Deshalb gilt $J \subseteq A^c \subseteq (A \cap (a,b))^c$ und deshalb ist die Menge $A \cap (a,b)$ nicht dicht in (a,b). Dies widerlegt die Aussage.

Wir beweisen v): Es sei $(a,b) \subset \Omega$ ein nichtleeres Intervall. Es gilt

$$A \cup ((a,b) \setminus A) \subseteq \Omega$$

und deshalb $\nu((a,b) \setminus A) = 0$. Dadurch gilt $\nu(A \cap (a,b)) = a - b > 0$ und somit muss gelten $(a,b) \cap A \neq \varnothing$. Weil die Intervalle $(a,b) \subset \Omega$ eine Basis der Standardtopologie auf Ω bilden, folgt, dass die Teilmenge $A \subset \Omega$ dicht in Ω liegt. Dies Aussage ist also richtig.

$\square$

3) Es sei $(\gamma_k)_{k\geq 1}$ eine Folge von positiven reellen Zahlen so dass $\gamma_k \leq 3^{-k}$. Man zerlege das Einheitsintervall $[0,1]$ in drei disjunkte Intervalle I_0, I_1, I_2, wobei das zentrierte mittlere Intervall I_1 offen ist und die Länge γ_1 hat. Man zerlege nun jedes Intervall I_{a_1}, für $a_1 = 0,2$, in drei Teilintervalle $I_{a_1 0}, I_{a_1 1}, I_{a_1 2}$, wobei das zentrierte mittlere Intervall $I_{a_1 1}$ offen ist und die Länge γ_2 hat. Ebenso verfahre man mit $I_{a_1 a_2}$ $(a_1, a_2 = 0, 2)$ usw.

Es bezeichne G die Vereinigung aller offenen mittleren Intervalle

$$I_1, I_{01}, I_{21}, I_{001}, \ldots,$$

und $C = [0,1] \setminus G$ die allgemeine Cantormenge.

a) Zeige: C ist abgeschlossen, nirgends dicht und hat die Kardinalität von $\mathbb{R}$.

Lösung: Da eine beliebige Vereinigung offener Mengen offen ist, ist die Menge C als Komplement einer offenen Menge abgeschlossen. Um zu zeigen, dass C nirgends dicht ist, müssen wir zeigen, dass kein nichtleeres Intervall (a,b) mit $(a,b) \subset C$ existiert. Es sei

$$C_k := \bigcup_{(a_1,\ldots,a_k)\in\{0,2\}^k} I_{a_1\cdots a_k}. \tag{1}$$

Die Menge C_k ist die Vereinigung der äusseren Intervalle im k-ten Schritt. Nach Konstruktion gilt

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k. \tag{2}$$

Nehme nun an, dass $(a,b) \subset C$. Dann gilt $(a,b) \subset C_k$ für alle $k \geq 1$. Es bezeichne l_k die Intervall-Länge der Intervalle aus denen C_k zusammengesetzt ist. Nach Konstruktion gilt

$$l_k = \frac{1}{2^k}\left(1 - \sum_{\ell=1}^{k} 2^{\ell-1}\gamma_\ell\right) \leq \frac{1}{2^k},^{1}$$

und somit muss

$$b - a \leq \frac{1}{2^k}$$

für alle $k \geq 1$ gelten und deshalb $a = b$. Wir haben also gezeigt, dass C nirgends dicht ist. Es bleibt noch zu zeigen, dass C die Kardinalität von $\mathbb{R}$ hat. Aus dem Basisjahr ist bekannt, dass $\#\{0,2\}^{\mathbb{N}}) = \#\mathbb{R}$. Es sei $\mathbf{a} := (a_k)_{k\geq 1} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ und es bezeichne $[\mathbf{a}]_k := (a_1, \ldots, a_k)$. Aufgrund von (1) und (2) wissen wir, dass

$$C = \bigcup_{\mathbf{a}\in\{0,2\}^{\mathbb{N}}} I_{\mathbf{a}}, \quad \text{wobei } I_{\mathbf{a}} := \bigcap_{k=1}^{\infty} I_{[\mathbf{a}]_k}. \tag{3}$$

Das Intervallverschachterlungsprinzip sagt uns, dass die Menge $I_{\mathbf{a}}$ genau aus einem Punkt besteht, da die abgeschlossenen Intervalle $I_{[\mathbf{a}]_k}$ verschachtelt sind und die Intervall-Längen der $I_{[\mathbf{a}]_k}$'s gegen Null konvergieren. Wir behaupten nun, dass $I_{\mathbf{a}_1} \neq I_{\mathbf{a}_2}$ falls $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{a}_2$. Falls $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{a}_2$ existiert ein $N \geq 1$, so dass $[\mathbf{a}_1]_N \neq [\mathbf{a}_2]_N$. Nach Konstruktion sind die Intervalle $I_{[\mathbf{a}_1]_N}$, $I_{[\mathbf{a}_2]_N}$ disjunkt und somit folgt direkt, dass $I_{\mathbf{a}_1} \neq I_{\mathbf{a}_2}$. Mittels (3) haben wir also gezeigt, dass C eine überabzählbare Vereinigung von disjunkten nicht-leeren einelementigen Mengen ist und deshalb gilt $\#C = \#\mathbb{R}$.

$\square$

b) Berechne des Lebesgue-Mass von C.

[1] Sanity check: im Schritt $k = 1$ beschreibt C_1 die zwei äusseren Intervalle, die sich die Länge $1 - \gamma_1$ teilen, ergo $l_1 = \frac{1}{2}$.

Lösung: Es sei $\epsilon_k > 0$, so dass $\gamma_k + \epsilon_k = 3^{-k}$. Beachte

$$\begin{aligned} 1 = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} &= \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}2^k\gamma_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}2^k\epsilon_k \\ &= \lambda(G) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}2^k\epsilon_k. \end{aligned}$$

und somit

$$\mu(C) = 1 - \mu(G) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}2^k\epsilon_k.$$

Es gilt also $\mu(C) = 0$ genau dann wenn C die klassische Cantor-Menge ist mit $\gamma_k = 3^{-k}$.

$\square$

4) Zeige den Satz von Cantor:

Theorem (Cantor 1890)**.** *Sei X eine beliebige Menge. Dann hat die Potenzmenge 2^X grössere Mächtigkeit als X, i.e. es existiert eine injektive Abbildungi $: X \to 2^X$, aber keine surjektive Abbildung $f : X \to 2^X$.*

Gehe wie folgt vor:

a) Konstruiere eine injektive Abbildung $i\colon X \to 2^X$.

Lösung: Die Abbildung $i(x) := \{x\}$ ist injektiv. $\square$

b) Nimm an es gibt eine surjketive Abbildung $f : X \to 2^X$ und leite einen Widerspruch her – betrachten Sie dazu die Menge $B = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$.

Lösung: Falls $f\colon X \to 2^X$ surjektiv ist, existiert ein $y \in X$ sodass $f(y) = B$. Wir machen eine Fallunterscheidung: angenommen $y \in f(y)$, erhalten wir einen Widerspruch zur Definition von $B = f(y)$.

Falls aber $y \notin f(y)$, dann ist $y \in B$ per Definition von B, aber $f(y) = B$, also erhalten wir wieder einen Widerspruch. Dies zeigt insgesamt, dass die Existanzannahme von f zu einem Widerspruch führt, was zu zeigen war.

$\square$

5) a) Zeige, dass die Borel σ-Algebra $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}$ die gleiche Mächtigkeit hat wie $\mathbb{R}$.

Lösung: Dass $\mathcal{B}$ mindestens dieselbe Kardinalität wie $\mathbb{R}$ besitzt folgt aus der Tatsache, dass für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\{x\} \in \mathcal{B}$. Es ist etwas schwieriger zu zeigen, dass die Kardinalität von $\mathcal{B}$ höchstens die von $\mathbb{R}$ ist. Dazu beobachten wir erstmal, dass

$$\mathcal{E} := \big\{(q,p) \,\big|\, q,\, p \in \mathbb{Q}\big\} \subseteq \mathbb{R}$$

die σ-Algebra $\mathcal{B}$ erzeugt. Wir enumerieren $\mathcal{E} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und indentifierezen jedes I_n mit der Folge

$$(0, n, 0, 0, \dots) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}.$$

Das Komplement I_n^c wird mit $(2, n, 0, 0, \dots)$ identifiziert, und $I_{n_0} \cup I_{n_1}$ mit $(1, m_1, m_2, \dots)$ wobei

$$m_{2^{n_i}(2k+1)}$$

das k-te Element der Folge von I_{n_i} bezeichnet ($i = 0, 1$). Diese Vereinigungsregel kann für abzählbare Vereingungen erweitert werden. Da $\mathcal{E} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die σ-Algebra $\mathcal{B}$ generiert, kann zu jedem $B \in \mathcal{B}$ eine Folge von Folgen zugewissen werden (sprich ein Element in $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$), die B eindeutig codiert, d.h. zwei Borel-Mengen B_0 und B_1 mit der selben Folge von Folgen sind gleich, i.e. $B_0 = B_1$. Dies zeigt, dass die Kardinalität von $\mathcal{B}$ höchstens $\#\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \#\mathbb{R}$ ist. Mit dem ersten Teil reicht dies also aus um $\#\mathcal{B} = \#\mathbb{R}$ zu schliessen.[2]

$\square$

b) Zeige, dass nicht Borel-messbare Mengen $A \subseteq \mathbb{R}$ existieren. **Hinweis:** Nach dem Satz von Cantor (siehe Aufgabe 4) hat für jede Menge X die Potenzmenge 2^X grössere Mächtigkeit als X.

Beweis. Dies folgt sofort aus Aufgabe 4 und 5 a) weil

$$\#\mathcal{B} = \#\mathbb{R} < \#2^{\mathbb{R}}.$$

$\square$

[2] Diese Lösung ist etwas knapp – für mehr Details siehe hier.

c) Zeige, dass Mengen $A \subseteq \mathbb{R}$ existieren, die Lebesgue- aber nicht Borel-messbar sind.

Es bezeichne C die Cantor-Menge, gegeben durch

$$C := \bigcap_{k=1}^{+\infty} C_k,$$

wobei $C_0 = [0,1]$ und $C_k = \frac{C_{k-1}}{3} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{C_{k-1}}{3}\right)$. Sei $\mathcal{B}$ die Borel σ-Algebra und $\mathcal{A}$ die Menge der Lebesgue-messbaren Mengen. Von der Definition folgt $C \in \mathcal{B}$ und es gilt

$$m(C) = \mu(C) = \lim_{k\to\infty} \mu(C_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{2^k}{3^k} = 0,$$

wobei μ (resp. m) das Lebesgue Mass auf $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{A}$) ist. Alternativ siehe Lösung von 3b). Es lässt sich zeigen, dass

$$C = \left\{ x \in [0,1] \;\middle|\; x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 3^{-k}, a_k \in \{0,2\} \right\}$$

und somit ist C gleichmächtig wie $\mathbb{R}$. Alternativ siehe Lösung von 3a). Weil $\mu(C) = 0$ gilt sind alle Teilmengen $D \subseteq C$ Lebesgue-messbar weil das Lebesgue Mass μ auf $\mathcal{A}$ vollständig ist. Insbesondere gilt mit Aufgabe 4 und 5a)

$$\#\mathcal{B} = \#\mathbb{R} < \#2^{\mathbb{R}} = \#2^{C} \leq \#\mathcal{A}.$$

Insbesondere ist $\mathcal{A} \setminus B \neq \emptyset$.