1) Bestimme den Grenzwert der Folgen

a) $a_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cdot e^{\frac{x}{2}}\, dx$ mittels majorisierter Konvergenz,

Lösung: Definiere

$$f_n := \chi_{[0,n]} \cdot \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cdot e^{\frac{x}{2}}.$$

Dann gilt $a_n = \int_0^\infty f_n\, dx$. Man beobachte, dass $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ monoton steigend gegen e^{-x} konvergiert. Insbesondere gilt

$$f_n \leq e^{-x} e^{\frac{x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}}.$$

Letzere Funktion ist aber auf $[0, \infty)$ integrierbar, insbesondere können wir die majorisierte Konvergen anwenden und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n\, dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n\, dx = \int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}\, dx = 2.$$

$\square$

b) $b_n = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot e^{-2x}\, dx$ mittels monotoner Konvergenz.

Lösung: Definiere

$$g_n := \chi_{[0,n]} \cdot \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot e^{-2x}.$$

Wie davor gilt auch hier $b_n = \int_0^\infty g_n\, dx$ und g_n konvergiert monoton steigend gegen die Funktion $e^x \cdot e^{-2x} = e^{-x}$. Wir können also die monotone Konvergenz anwenden und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty g_n\, dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} g_n\, dx = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1.$$

$\square$

2) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und ν das äussere Lebesgue-Mass auf $\mathbb{R}^n$. Zeige folgende Aussagen:

a) Es exisitert eine G_δ-Menge B so dass $B \supset A$ und $\nu(A) = \nu(B)$.[1]

Lösung: Falls $\nu(A) = \infty$ gilt, können wir X als gewünschte G_δ-Menge wählen und sind fertig. Sei also oBdA $\nu(A) < \infty$. Theorem 2.13 besagt, dass es eine Folge von offenen Mengen $U_k \supseteq A$ gibt, so dass

$$\nu(A) = \lim_{i\to\infty} \mu(U_i).$$

Da $\nu(A)$ endlich ist, können wir annehmen, dass $\mu(U_1) < \infty$ gilt. Wir definieren

$$V_i = \bigcap_{j=1}^{i} U_i.$$

Alle V_i sind offen und enthalten A. Wegen der Monotonie gilt

$$\nu(U_i) \geq \nu(V_i) \geq \nu(A).$$

Weil V_i und U_i offen sind stimmen ν und μ überein. Aufgrund der Infimum-Definition in Theorem 2.13 und der obigen Ungleichung wissen wir:

$$\nu(A) = \lim_{i\to\infty} \mu(U_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(V_i).$$

Gleichzeitig wissen wir aber

$$\mu(V_1) = \mu(U_1) < \infty \text{ und } V_{i+1} \subseteq V_i$$

und weil μ ein Mass auf $\mathcal{B}$ definiert, erhalten wir also

$$\nu(A) = \lim_{i\to\infty} \mu(V_i) = \mu\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} V_i\right),$$

cf. Theorem 1.28 (v). Also ist $B := \bigcap_{i\in\mathbb{N}} V_i \in \mathcal{B}$ eine G_δ-Menge, die die gewünschten Eigenschaften besitzt.

$\square$

b) Ist A Lebesgue-messbar, dann existiert eine F_σ-Menge C so dass $C \subseteq A$ und $\nu(A) = \nu(C)$.[2]

Lösung: Der Beweis ist analog zu 2a): man wendet wieder Theorem 2.13 an (mit dem Supremum und den Kompakten Mengen) – die Inklusionen müssen lediglich umgedreht werden und Schnitte werden mit Vereinigungen ausgetauscht. Man beachte, dass die

[1] Zur Erinnerung: B ist eine G_δ-Menge, wenn B als abzählbarer Schnitt von offenen Mengen geschrieben werden kann.

[2] Zur Erinnerung: C ist eine F_σ-Menge, wenn C als abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen geschrieben werden kann.

Annahme $\nu(A) < \infty$ nichtmehr notwendig ist, weil sich das Mass μ unter Vereinigungen von monoton steigenden Mengen besser verhält (vgl. Theorem 1.28 (iv) und (v)).

$\square$

3) Zeige, dass jede Teilmenge $A \subseteq V$ eines echten Untervektorraumes $V \subsetneq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-Mass 0 hat.

Lösung: Sei m die Dimension von V. Da V eine echter Untervektorraum ist gilt $m < n$. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass es eine orthogonale Matrix

$$\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

gibt, so dass

$$\phi\left(\mathbb{R}^m \times \{0, \ldots, 0\}\right) = V.$$

Wir wissen, dass ϕ ein Diffeomorphismus ist und dass $d\phi = \phi$ gilt, weil ϕ linear ist. Weil ϕ orthogonal ist folgt also auch

$$|\det(d\phi)| = |\det(\phi)| = 1.$$

Die charackteristische Funktion $\chi_V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist Lebesgue-messbar, weil V (topologisch) abgeschlossen ist und somit Borel-messbar ist.[3] Mit der Transformationsformel (e.g. Theorem 2.17) folgt also

$$\begin{aligned} m(V) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_V \, dm \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\chi_V \circ \phi)\, |\det(d\phi)|\, dm \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\mathbb{R}^m \times \{0,\ldots,0\}})\, dm \\ &= m\left(\mathbb{R}^m \times \{0, \ldots, 0\}\right). \end{aligned}$$

Wir behaupten $m\left(\mathbb{R}^m \times \{0, \ldots, 0\}\right) = 0$. Dazu sei Q_k eine Folge von Quader in $\mathbb{R}^m$, die $\mathbb{R}^m$ abdecken

$$\mathbb{R}^m = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k,$$

[3] Das V eine abgeschlossene Menge im topologischen Sinne ist folgt schnell aus der Tatsache, dass $\mathbb{R}^m \times \{0. \ldots, 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist und ϕ ein Diffeomorphismus ist.

und

$$\mathrm{Vol}_m(Q_k) = C > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

für ein fixes $C > 0$ erfüllen. Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ definieren wir nun Quader $Q_{k,\varepsilon}$ in $\mathbb{R}^n$:

$$Q_{k,\varepsilon} := Q_k \times \left[\frac{-\varepsilon}{2k^2}, \frac{\varepsilon}{2k^2}\right] \times \left[\frac{-\varepsilon}{2k^2}, \frac{\varepsilon}{2k^2}\right] \times \cdots \times \left[\frac{-\varepsilon}{2k^2}, \frac{\varepsilon}{2k^2}\right].$$

Dann gilt

$$m(Q_{k,\varepsilon}) = \mathrm{Vol}_n(Q_{k,\varepsilon}) = \mathrm{Vol}_m(Q_k)\left(\frac{\varepsilon}{k^2}\right)^{n-m} = C \cdot \left(\frac{\varepsilon}{k^2}\right)^{n-m}.$$

Insbesondere

$$\begin{aligned} m\left(\mathbb{R}^m \times \{0, \ldots, 0\}\right) &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} m(Q_{k,\varepsilon}) \\ &\leq C \cdot \varepsilon^{n-m} \cdot \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^2} \\ &\leq \tilde{C} \cdot \varepsilon^{n-m}, \end{aligned}$$

für eine grössere Konstante $\tilde{C} > 0$. Weil $\varepsilon > 0$ aber beliebig gewählt worden ist, beweist die obere Abschätzung die Behauptung – beachte dass wir hier $n - m \geq 1$ verwendet haben!

Die Behauptung zusammen mit der Gleichung der Transformationsformel zeigt also

$$m(V) = 0.$$

Insbesondere ist aufgrund der Vollständigkeit des Lebesgue-Masses m jede Teilmenge $A \subseteq V$ Lebesgue-messbar mit $m(A) = 0$.

$\square$

4) Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst **Jordan-messbar** falls die charakteristische Funktion $\chi_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar ist.

   a) Finde eine Jordan-messbare Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$, die nicht Borel-messbar ist.

   Lösung: Sei $C \subseteq [0, 1]$ die Cantor-Menge. Wir haben in der Lösung von Serie 5, Aufgabe c) gesehen, dass es ein $N \subseteq C$ geben muss, das *nicht* Borel-messbar ist. Aus der Analysis wissen wir, dass die charakteristische Funktion χ_C Riemann integrierbar ist, und somit gilt

$$\mathcal{R}(\chi_C) = \int_{\mathbb{R}} \chi_C \, dm = m(C) = 0,$$

Serie 5 Aufgabe 3b) und Theorem 2.24. Insbesondere ist auch χ_N Riemann integrierbar und deshalb per Definition N Jordan-messbar. Deshalb ist $A = N$ eine Wahl, die die gewünschten Eigenschaftern erfüllt. $\square$

b) Finde eine beschränkte Lebesgue-messbare Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$, die weder Jordan- noch Borel-messbar ist und positives Lebesgue-Mass hat.

Beweis. Sei N wie in Teil a) und definiere

$$A := [0,1] \setminus (\mathbb{Q} \cup N)\,.$$

Die Menge A ist Lebesgue-messbar weil N Lebesgue-messbar ist. Es gilt

$$m(A) = 1 - m(\mathbb{Q} \cup N) = 1 - m(\mathbb{Q}) - m(N) = 1,$$

aber $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$, das heisst das für jede Partition in der Untersumme von χ_A eine rationale Zahl auftaucht – da diese aber nicht in A liegen ist die Untersumme von χ_A konstant gleich 0. Wäre χ_A also Riemann-messbar, würden wir $\mathcal{R}(\chi_A) = 0$ erhalten, was Satz 2.24 widerspricht denn

$$0 = \mathcal{R}(\chi_A) = m(A) = 1.$$

Also ist χ_A *nicht* Riemann integrierbar und somit A *nicht* Jordan-messbar.

Da A beschränkt ist und strikt positives Lebesgue-Mass hat, bleibt es nur noch zu zeigen, dass A *nicht* Borel-messbar ist. Definiere dazu

$$B := \mathbb{Q} \cup N = [0,1] \setminus A.$$

Wir nehmen per Widerspruch an, dass A Borel-messbar ist. Dann ist auch B wie oben Borel-messbar. Da $\mathbb{Q} \cap N^c$ höchstens abzählbar ist, ist $\mathbb{Q} \cap N^c$ auch Borel-messbar, und wir erhalten dass auch

$$B \setminus (\mathbb{Q} \cap N^c) = N$$

Borel-messbar ist. Dies widerspricht $N \notin \mathcal{B}$. Also haben wir gezeigt, dass das obige A *nicht* Borel-messbar ist. $\square$

5) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $\nu\colon 2^X \to [0,\infty]$ definiert als

$$\nu(B) := \inf \left\{ \mu(A) \,\middle|\, A \supseteq B,\ A \in \mathcal{A} \right\}.$$

a) Zeige, dass ν ein äusseres Mass definiert und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}(\nu)$.

Lösung: Es gilt $\nu(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Seien $B_0 \subseteq B_1 \subseteq X$ und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ folgen von Mengen in $\mathcal{A}$ mit

$$A_k \supset B_1,\ \nu(B_1) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

Dann aber überdeckt auch jedes einzeln A_k die Menge B_0, und mit der Infimum-Definition folgt also

$$\nu(B_1) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) \geq \nu(B_0).$$

Noch zu zeigen ist die Subadditivität: sei $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen in X und $(A_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$ sodass

$$A_k^i \supset B_i,\ \nu(B_i) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k^i).$$

Dann gilt, aber dank der Montonie und Eigenschaften des Masses μ, für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\nu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right) &\leq \nu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_k^i\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_k^i\right) \\
&\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_k^i).
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$\nu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right) \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_k^i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \nu(B_i).$$

Also ist ν ein äusseres Mass.
Sei nun $A \in \mathcal{A}$ und $D \subseteq X$ beliebig. Sei D_k eine Folge in $\mathcal{A}$, so dass D_k die Menge D überdeckt und

$$\nu(D) = \lim_{k\to\infty} \mu(D_k).$$

Weil $D_k \cap A$ und $D_k \setminus A$ disjunkt sind und μ ein Mass ist, erhalten wir

$$\nu(D) = \lim_{k\to\infty} \mu(D_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(D_k \cap A) + \mu(D_k \setminus A).$$

Weil $D_k \cap A$ (resp. $D_k \setminus A$) in $\mathcal{A}$ liegt und $D_k \cap A \supseteq D \cap A$ (resp. $D_k \setminus A \supset D \setminus A$) schliessen wir wieder mit der Infimum-Definition

$$\lim_{k\to\infty} \mu(D_k \cap A) \geq \nu(D \cap A), \text{ resp. } \lim_{k\to\infty} \mu(D_k \setminus A) \geq \nu(D \setminus A).$$

Dies beweist

$$\nu(D) \geq \nu(D \cap A) + \nu(D \setminus A).$$

Für die andere Ungleichung wählen wir zwei Folgen B_k, C_k in $\mathcal{A}$ die jeweils $D \cap A$ und $D \setminus A$ überdecken, sodass deren μ-Masse gegen $\nu(D \cap A)$ und $\nu(D \setminus A)$ konvergieren. Dann gilt $B_k \cup C_k \supseteq D$ für alle k und somit erhalten wir mit derSubadditivität von μ und Infimum-Definition von ν:

$$\begin{aligned}\nu(D \cap A) + \nu(D \setminus A) &= \lim_{k\to\infty} (\mu(B_k) + \mu(C_k)) \\ &\geq \lim_{k\to\infty} \mu(B_k \cup C_k) \\ &\geq \nu(D).\end{aligned}$$

Dies zeigt $A \in \mathcal{A}(v)$ und somit die gewünschte Inklusion $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}(\nu)$.

$\square$

b) Sei zusätzlich $\mu(X) < \infty$. Zeige, dass der Massraum $\left(X, \mathcal{A}(\nu), \nu\big|_{\mathcal{A}(\nu)}\right)$ gleich der Vervollständingung von $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist.
Hinweis: Zeige, dass für jedes $B \subseteq X$ ein $A \in \mathcal{A}$ existiert mit $A \supseteq B$ und $\nu(B) = \mu(A)$.

Lösung: Wir nehmen zuerst den Hinweis an. Wir wissen vom Theorem 2.4, dass $\left(X, \mathcal{A}(\nu), \nu\big|_{\mathcal{A}(\nu)}\right)$ vollständig ist. Ausserdem gilt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}(\nu)$, cf. 5a). Weil die Vervollständigung der kleinste vollständige Massraum ist, der den ursprünglichen Massraum erweitert (cf. Serie 4, Aufgabe 3) können wir also bereits $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{A}(\nu)$ schliessen. Für die andere Inklusion sei $B \in \mathcal{A}(\nu)$. Wir wenden die ν-messbarkeit von B mit $D = X$ an:

$$\nu(X) = \nu(X \cap B) + \nu(X \setminus B) = \nu(B) + \nu(X \setminus B).$$

Wir wenden nun den Hinweis auf B und $X \setminus B$ an und erhalten

$$A,\, E \in \mathcal{A}: \quad B \subseteq A,\ X \setminus B \subseteq E,\ \mu(A) = \nu(B),\ \mu(E) = \nu(X \setminus B).$$

Insbesondere gilt

$$E^c \subseteq B \subseteq A.$$

Falls wir also zeigen können, dass $\mu(A \setminus E^c) = 0$ gilt, haben wir $B \in \mathcal{A}^*$ (per Definition). Ersteres folgt aber aus

$$\mu(A) = \mu(A \setminus E^c) + \mu(A \cap E^c) = \mu(A \setminus E^c) + \mu(A)$$

und

$$\mu(A) = \nu(A) \leq \nu(X) < \infty.$$

Also ist $\mathcal{A}(\nu) \subseteq \mathcal{A}^*$ gezeigt und somit gilt Gleichheit. Dass die Masse μ^* und $\nu\big|_{\mathcal{A}^*}$ übereinstimmen folgt aus der Tatsache, dass sie es auf $\mathcal{A}$ tun und Eindeutigkeit aus Theorem 1.55 (ii).

Wir beweisen den Hinweis:

Sei $B \subseteq X$ beliebig und A_k eine Folge in $\mathcal{A}$ mit $\nu(B) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$. Wir definieren

$$C_k := \bigcap_{l=1}^{k} A_k \in \mathcal{A}.$$

Dies definiert eine absteigende Folge in $\mathcal{A}$ mit $C_k \supseteq A_k \supseteq B$. Insbesondere gilt aufgrund der Monotonie von μ und Infimum-Definition von ν:

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(C_k).$$

Aber C_k ist absteigend und

$$\mu(C_1) \leq \mu(X) = \nu(X) < \infty,$$

insbesondere erhalten wir für $A := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k \in \mathcal{A}$:

$$\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(C_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \nu(B).$$

$\square$

c) Sei X eine Menge und $A \subsetneq X$ nichtleer. Definiere

$$\mathcal{A} := \{\emptyset,\, A,\, A^c,\, X\},\ \mu(\emptyset) := \mu(A) := 0,\ \mu(A^c) := \mu(X) := \infty.$$

i) Für $B \subseteq X$ gilt

$$\nu(B) = \begin{cases} 0, & \text{falls } B \subseteq A, \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

ii) Berechne die Vervollständigung $(X, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ und $\mathcal{A}(\nu)$.

iii) Schliesse, dass die Annahme $\nu(X) < \infty$ in b) notwendig ist.

Lösung: Ad i): Falls $B \subseteq A$ dann gilt $\nu(B) = \mu(A) = 0$, da ausser A nur X in $\mathcal{A}$ liegt und gleichzeitig B beinhaltet, aber $\mu(X) = \infty$ und wegen der Infimum-Definition muss also $\nu(B) = \mu(A)$ gelten. Falls B nicht in A enthalten ist, kommt bei der Infimum-Definition nur X in Frage, und somit gilt in diesem Fall $\nu(B) = \nu(X) = \infty$.

Ad ii): man direkt überprüfen, dass $\mathcal{A}(v) = 2^X$: sei $B \subseteq X$ beliebig und $D \subseteq X$ beliebig. Im ersten Fall nehmen wir an, dass $D \subseteq A$. Dann gilt

$$\nu(D) = \infty,\ \nu(D \cap B) = \infty,\ \nu(D \setminus B) = \infty,$$

weil alle 3 Mengen in D und somit in A enthalten sind. Falls jetzt aber D nicht in A enthalten ist, dann sind alle drei Masse oben gleich 0. In beiden Fällen erhalten wir also

$$\nu(D) = \nu(D \cap B) + \cap(D \setminus B),$$

was $2^X = \mathcal{A}(\nu)$ beweist. Für $\mathcal{A}^*$ stellen wir die Vermutung

$$\mathcal{A}^* = \left\{ B \subseteq X \;\middle|\; B \subseteq A \text{ oder } B \supseteq A^c \right\}.$$

Da A eine Nullmenge von A ist, muss die Vervollständigung, per Definition eines vollständigen Massraums, sämtliche Teilmengen $B \subseteq A$ enthalten. Abzählbare Vereinigungen/Schnitte von Teilmengen B in A sind selber Teilmenge von A, aber mit B^c erhalten wir auch sämtliche Teilmengen, die A^c enthalten. Ein ähnliches Argument wie für A zeigt, dass Mengen, die A^c enthalten, unter σ-Algebra Operation nur A^c nicht mehr enthalten können, wenn man das Komplement bildet – dann landen wir aber wieder in A.

Summa summarum haben wir gezeigt, dass wenn wir die für die Vollständigkeit notwendigen Nullmengen zu $\mathcal{A}$ hinzufügen und die davon generierte σ-Algebra betrachten, erhält man $\mathcal{A}^*$ wie oben beschrieben. Mit Serie 4 Aufgabe 3 zeigt dies also die Vermutung.

Ad iii): wäre $\nu(X) < \infty$ in b) nicht notwendig, dann müsste $\mathcal{A}(\nu) = \mathcal{A}^*$ in c) gelten, was offensichtlich c) ii) widerspricht.

$\square$