1) Sei (X,ρ) ein metrischer Raum und fixiere $d \geq 0$ eine reelle Zahl. Für $\varepsilon > 0$ definiere die Funktion

$$\nu_{d,\varepsilon}\colon 2^X \longrightarrow [0,\infty]$$

als

$$\nu_{d,\varepsilon}(A) := \inf \left\{ \sum_{i\in I} \operatorname{diam}(D_i)^d \;\middle|\; \begin{array}{l} I \text{ höchstens abzählbar }, D_i \subseteq X, \\ \operatorname{diam}(D_i) < \varepsilon \,\forall i \in I,\, A \subseteq \cup_{i\in I} D_i \end{array} \right\}.^{1}$$

Das **äussere Hausdorff Mass** $\nu_d\colon 2^X \to [0,\infty]$ ist definiert als

$$\nu_d(A) := \sup_{\varepsilon>0} \nu_{d,\varepsilon}(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \nu_{d,\varepsilon}(A), \quad A \subseteq X.$$

a) Zeige, dass ν_d ein äusseres Mass ist,

Lösung: Es ist klar, dass $\nu_{d,\varepsilon}(\emptyset) = 0$ ist, deshalb gilt $\nu_d(\emptyset) = 0$. Für Montonie seien $A \subseteq B \subseteq X$. Dann gilt für D_i mit $B \subset \bigcup_{i\in I} D_i$ auch $A \subset \bigcup_{i\in I} D_i$ und deshalb $\nu_{d,\varepsilon}(A) \leq \nu_{d,\varepsilon}(B)$, weil $\operatorname{diam}(\cdot)^d$ monoton ist für alle $d \geq 0$. Für Subadditivität sei A_n eine Folge von Teilmengen von X und $D_{i,n}$ sodass $\operatorname{diam}(D_{i,n}) < \varepsilon$ und $A_n \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_{i,n}$ mit

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(D_{i,n})^d \leq \nu_d(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

gilt. Weil $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ von $\{D_{i,n}\}_{i,n\in\mathbb{N}}$ überdeckt wird und $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ abzählbar ist, wissen wir per Definition

$$\begin{aligned} \nu_{d,\varepsilon}(A) &\leq \sum_{i,n\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(D_{i,n})^d \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(D_{i,n})^d \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_d(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_d(A_n) + \varepsilon. \end{aligned}$$

[1]Zur Erinnerung:

$$\operatorname{diam}(B) = \sup_{x,y\in B} \rho(x,y).$$

Insbesondere gilt

$$\nu_d(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \nu_{d,\varepsilon}(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_d(A_n).$$

$\square$

b) Zeige, dass für zwei Mengen A, $B \subseteq X$ mit

$$\rho(A, B) := \inf_{(x,y) \in A \times B} \rho(x, y) > 0$$

folgendes gilt:

$$\nu_d(A \cup B) = \nu_d(A) + \nu_d(B).$$

Schliesse, dass $\mathcal{A}(\nu_d)$ eine σ-Algebra ist, die die σ-Borel algebra $\mathcal{B}_X$ enthält.[2]

Lösung: Die "$\leq$"Richtung folgt aus Teil a). Sei $0 < \delta < \rho(A, B)$, und D_i eine (höchstens) abzählbare Abdeckung von $A \cup B$ mit $\operatorname{diam}(D_i) < \delta$. Dann schneidet jedes D_i nur A oder B, und deshalb:

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{diam}(D_i)^d &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\operatorname{diam}(D_i \cap A) + \operatorname{diam}(D_i \cap B)\right)^d \\
&\geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{diam}(D_i \cap A)^d + \operatorname{diam}(D_i \cap B)^d \\
&\geq \nu_{d,\delta}(A) + \nu_{d,\delta}(B)
\end{aligned}$$

Mit dem Infimum der D_i wie inder Definition von $\nu(A \cup B)$ und $\delta \to 0$ folgt also

$$\nu_d(A \cup B) \geq \nu_d(A) + \nu_d(B).$$

Dies zeigt die Gleichheit. Dass dann $\mathcal{A}(\nu_d)$ eine σ-Algebra ist und $\mathcal{B}_X$ enthält folgt aus dem Carathéodory Kriterium (i.e. Theorem 2.5).

$\square$

c) Zeige, dass für $d = 0$ gilt: $\mathcal{A}(\nu_0) = 2^X$ und ν_0 ist das Zählmass.

Lösung: Falls $A \subseteq X$ endlich ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass eine Menge D_i mit $\operatorname{diam}(D_i) < \varepsilon$ und $0 < \varepsilon < \delta$ höchstens ein Element x_i aus A enthält. Insbesondere gilt für jede solche Abdeckung D_i:

$$\# D_i \cap A \leq 1.$$

---

[2] Das Mass $\mu_d := \nu_d\big|_{\mathcal{A}(\nu_d)}$ wird auch das **d-dimensionale Hausdorff Mass** genannt.

Aufgrund der Infimum Definition können wir alle D_i vernachlässigen, die A nicht schneiden und nehmen also $D_i \cap \{x_i\}$ an, wobei $A = \{x_i\}_{i=1}^n$. Wir erhalten somit

$$\nu_{0,\varepsilon}(A) \geq \sum_{i=1}^{n} \operatorname{diam}(D_i)^0 = \sum_{i=1}^{n} = n = \#A.$$

Falls A unendlich ist, finden wir eine Teilmenge $B \subset A$ die abzählbar unendlich ist. Wir schreiben $B = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Sei D_i eine Folge von nicht-leeren Mengen, die zusammen B überdecken. Dann gilt

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(D_i)^0 \geq \sum_{k\in\mathbb{N},\, x_k\in D_{i_k}} \operatorname{diam}(D_{i_k})^0 = \sum_{k\in\mathbb{N},\, x_k\in D_{i_k}} 1 \geq \infty.$$

Insbesondere ist $\nu_0(B) = \infty$ und wegen Monotonie (siehe Teil a)): $\nu_0(A) = \infty$.
Der Satz von Carathéodory (cf. Theorem 2.4) besagt, dass $(X, \nu_0, \mathcal{A}(\nu_0)) = (X, \#, \mathcal{A}(\#))$ vollständig ist, aber aus Serie 4, Aufgabe 4)a)i) wissen wir, dass dann $\mathcal{A}(\#)$ die ganze Potenzmenge ist.

$\square$

2) Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige und injektive Abbildung und $\nu_1\colon 2^{\mathbb{R}^n} \to [0,\infty]$ das äussere Hausdorff Mass auf $\mathbb{R}^n$. Die *Länge* von γ ist definiert als

$$L(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{N} d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \,\Big|\, N \in \mathbb{N},\, a \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_N \leq b \right\}$$

Zeige, dass

$$\nu_1(\operatorname{im}(\gamma)) = L(\gamma).$$

Lösung: Wir beweisen zuerst, dass $\nu_1(\operatorname{Im}(\gamma)) \leq L(\gamma)$. Falls $L(\gamma) = \infty$, so ist nichts zu zeigen, andernfalls sei $n \in \mathbb{N}$ und man nehme eine Folge $t_0, t_1, \ldots t_{2^n}$ in $[a,b]$, sodass:

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{2^n} = b.$$

Indem man die Folge geschickt wählt, kann man annehmen:

$$L(\gamma|_{[t_k,t_{k+1}]}) = L(\gamma) \cdot 2^{-n}, \quad \forall k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}.^3$$

[3] Weil die t_k das Intervall $[a,b]$ in 2^n Teilintervalle aufteilt.

Sei $\varepsilon > 0$ und man definiere $\delta_n := (L(\gamma) + \varepsilon) \cdot 2^{-n}$. Es ist klar, dass:

$$\gamma([t_{2k}, t_{2k+1}]) \cup \gamma([t_{2k+1}, t_{2k+2}]) \subset B_{\delta_n}(\gamma(t_{2k+1})),$$

was impliziert, dass wenn man alles Bälle mit Radius δ_n um die (2^{n-1})-viele Punkte t_{2k+1} nimmt, so erhalten wir eine Überdeckung von γ. Folglich gilt gemäss der Definition des Hausdorff-Masses:

$$\nu_{1,2\delta_n}(\mathrm{Im}(\gamma)) \leq \sum_{k=1}^{2^{n-1}} 2\delta_n = 2^n(L(\gamma) + \varepsilon)2^{-n} = L(\gamma) + \varepsilon,$$

wobei die Summationsgrenzen wegen der (2^{n-1})-viele Bälle zustande gekommen ist, welche für die Überdeckung von γ nötig sind. Dies beweist die Ungleichung, nachdem man ε gegen 0 gehen lässt.

Als nächstes zeigen wir die umgekehrte Ungleichung. Wenn $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein Pfad ist, wollen wir die folgende Ungleichung beweisen:

$$\nu_1(\mathrm{Im}(\phi)) \geq \mathrm{diam}(\mathrm{Im}(\phi)) \tag{1}$$

Bevor wir diese aber beweisen, wenden wir sie auf unser γ an: Sei $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots t_N = b$ eine Folge von Punkten in $[a, b]$ und definiere $U_j := \mathrm{Im}(\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]})$ für alle $j = 1, \dots, N$. Bemerke, dass wegen der Injektivität von γ alle U_j paarweise disjunkt sind bis auf einzelne Punkte, welche ν_1-Mass 0 haben, deshalb:

$$\nu_1(\mathrm{Im}(\gamma)) = \sum_{j=1}^{N} \nu_1(U_j).$$

Die gesuchte Ungleichung folgt nun indem man zuerst (1) anwendet

$$d(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)) \leq \mathrm{diam}(\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}) = \mathrm{diam}(U_j) \leq \nu_1(U_j),$$

und über j summiert:

$$L(\gamma) - \varepsilon \leq \sum_{j=1}^{N} d(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)) \leq \sum_{j=1}^{N} \nu_1(U_j) = \nu_1(\mathrm{Im}(\gamma)),$$

durch eine geeignete Wahl der t_j. Lässt man ε gegen 0 gehen, so folgt erhalten wir genau die gewünschte Ungleichung und dadurch das gesuchte Resultat.

Es bleibt (1) zu beweisen. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $B_1, \dots, B_N$ eine beliebige Überdeckung des Bildes von ϕ mittels offener Bälle mit Durchmesser $\mathrm{diam}(B_i) < \varepsilon$. Seien $x, y \in \mathrm{Im}(\phi)$. Wegen der Stetigkeit von ϕ ist das

Bild zusammenhängend und daher existiert eine endliche Teilfamilie von Bällen $B_{j_1}, \ldots, B_{j_k}$, sodass $x \in B_{j_1}, y \in B_{j_k}$ und $B_{j_l} \cap B_{j_{l+1}} \neq \emptyset$ für alle l. Folglich existieren Punkte $z_1, \ldots, z_{k-1}$, sodass $z_l \in B_{j_l} \cap B_{j_{l+1}}$ (Einfachheitshalber seine x, y auch z_0, z_k) und wir folgern:

$$d(x,y) \leq \sum_{l=0}^{k-1} d(z_l, z_{l+1}) \leq \sum_{l=0}^{k-1} \operatorname{diam}(B_{j_{l+1}}).$$

Durch geeignete Wahl von $x, y \in \operatorname{Im}(\phi)$ mit Abstand gerade gleich dem Durchmesser des Pfades und mittels geeigneter Wahl der Überdeckung, folgt aus der Definition von ν_1:

$$\operatorname{diam}(\operatorname{Im}(\phi)) \leq \nu_1(\operatorname{Im}(\phi)).$$

$\square$

3) Sei C die (tertiäre) Cantormenge in $[0,1]$. Wir definieren die Cantorfunktion $\psi\colon [0,1] \to [0,1]$ wie folgt:

$$\psi(x) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}}, & \text{falls } x = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \in C,\ a_i \in \{0,2\}, \\ \displaystyle\sup_{y \in C,\, y \leq x} \psi(y), & \text{falls } x \notin C. \end{cases}$$

a) Zeige, dass ψ wohldefiniert, stetig, monoton steigend und surjektiv ist.

Lösung: Aus der Kontrsuktion der tertiären Cantormenge C folgt, dass C die Menge der $x \in [0,1]$ ist, die eine Tertiärdarstellung (a_i) zulassen mit $a_i \neq 1$. Da so eine Darstellung eindeutig ist zeigt das, dass ψ wohldefiniert ist.

Surjektivität ist klar, weil jedes $y \in [0,1]$ Binardarstellung besitzt. Monotonie: auf $[0,1] \setminus C$ ist ψ konstant und es genügt zu zeigen, dass ψ auf C monoton steigend ist. Seien $x, y \in C$ mit $x < y$. Dann gibt es eine erste Nachkommastelle $a_n \neq b_n$ an denen die jeweiligen eindeutigen Tertiärdarstellungen (a_i), (b_i)Í sich zum ersten mal unterscheiden – dieser Term dominiert die restlichen Summanden:

angenommen $a_n < b_n$, dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{b_n}{2^{n+1}} - \sum_{i=n}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}} &= \frac{b_n - a_n}{2^{n+1}} - \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}} \\ &\geq \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^j} \\ &\geq \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Insbesondere ist ψ monoton steigend.

Der Stetigkeitsbeweis wird nur skizziert. Ähnlich wie bei der Monotonie, reicht es auch Stetigkeit nur auf C zu überprüfen. Es gilt folgende Eigenschaft: für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $\delta_n > 0$ so dass für alle $0 < \delta < \delta_n$ gilt: falls $x, y \in C$ und $|x - y| < \varepsilon$, dann stimmen die ersten n Folgeglieder in den Tertiärdarstellungen von x und y überein.[4]

Sei nun $\varepsilon = \frac{1}{2^N} > 0$. Wir behaupten, dass $\delta := \delta_N$ die gewünschte Stetigkeit liefert. Tatsächlich gilt aufgrund der obigen Eigenschaft, dass für $x, y \in C$ mit

$$|x - y| < \delta_N$$

die ersten N Folgeglieder in den Tertiärdarstellungen übereinstimmmen:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i},\ y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i} \text{ und } a_i = b_i,\ i = 1, \ldots, N.$$

Dann gilt aber

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{|a_i - b_i|}{2^{i+1}} \leq \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{N+1}} < \varepsilon_N.$$

Also ist ψ stetig.

$\square$

b) Sei

$$\phi\colon [0,1] \to [0,2], \quad x + \psi(x).$$

Zeige, dass ϕ streng monoton steigend ist und ein Homoömorphismus ist.

[4] Der Beweis ist nicht schwierig – wie oben schon ein paar mal gesehen, geht es darum, dass die ersten Folgeglieder die nachfolgenden Summanden "dominieren".

Lösung: Dass ϕ streng monoton steigend ist folgt aus der Monotonie von ψ und $x \mapsto x$: für $x < y$ gilt

$$\phi(x) = x + \psi(x) < y + \psi(x) \leq y + \psi(y) = \phi(y).$$

Die Funktion ϕ ist als Summe von stetigen Funktionen wieder stetig (siehe Teil a)). Da $\phi(0) = 0$ und $\phi(1) = 1$ gilt, impliziert der Zwischenwertsatz, dass ϕ surjektiv ist. Injektivität folgt aus der strengen Monotonie. Nun ist ϕ aber eine stetige Bijektion von einem kompakten Raum, in einen Hausdorff Raum und ist somit automatisch[5] ein Homöomorphismus. $\square$

c) Zeige, dass $\phi(C)$ messbar ist und $m(\phi(C)) = 1$.
Hinweis: Welches Mass haben die Bilder der in der Definition von C entfernten Intervalle?

Lösung: Aus Teil b) wissen wir, dass ϕ ein Homöomorphismus ist und somit die geschlossene Menge C, auf die geschlossene Menge $\phi(C)$ sendet. Dies zeigt, dass $\phi(C)$ Borel-messbar ist. Wieder mit Teil b) folgt

$$2 = m([0,2]) = m(\phi(C)) + m([0,2] \backslash \phi(C)) = m(\phi(C)) + m(\phi([0,1]C)).$$

Es reicht also zu zeigen, dass

$$m(\phi([0,1] \setminus C)) = 1$$

gilt. Die Cantormenge C wird konstruiert, indem iterativ “drittel-Intervalleäus C rausgeschnitten werden; letztere haben immer die Form

$$I_i := \left[\frac{1}{3^i}, \frac{2}{3^i}\right], \; i \in \mathbb{N}.$$

Da ϕ ein streng monotoner Homöomorphismus ist, gilt

$$\phi(I_i) = \left[\phi\left(\frac{1}{3^i}\right), \phi\left(\frac{2}{3^i}\right)\right].$$

Mit den Definition lässt sich schliessen:

$$\phi\left(\frac{c_i}{3^i}\right) = \frac{c_i}{3^i} + \frac{c_i}{2^{i+1}}, \; c_i \in \{1,2\}$$

und somit

$$m(\phi(I_i)) = \frac{2-1}{2^{i+1}} + \frac{2-1}{3^i} = \frac{1}{2^{i+1}} + \frac{1}{3^i}.$$

[5] Das ist eine der besten Übungen zur Topologievorlesung, falls ihr noch keinen Beweis dazu gesehen habt.

Also erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} m(\phi([0,1]\setminus C)) &= \sum_{i=1}^{\infty} m(\phi(I_i)) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i} + \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{3^i} - 1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 \\ &= 1, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

□

d) Zeige, dass eine Lebesgue-messbare Menge $E \subset [0,1]$ existiert, so dass $\phi(E)$ *nicht* messbar ist. Folgere, dass auch Urbilder von Lebesgue-messbaren Mengen unter stetigen Funktionen nicht unbedingt wieder Lebesgue-messbar sein müssen.

Hinweis: Wende Lemma 2.15 im Skript auf $\phi(C)$ an.

Beweis. Wir folgen dem Hinweis und wenden das Lemma 2.15 um zu schliessen, dasses es ein $F \subseteq \phi(C)$ gibt, welches *nicht* Borel-messbar ist – das Lemma 2.15 verwendet $m(\phi(C)) = 1 > 0$, siehe Teil c). Aber für $E := \phi^{-1}(F)$ gilt

$$m(E) \leq m(C) = 0,$$

cf. Serie 5. Also ist aufgrund der Vollständigkeit E Lebesgue-messbar. Insbesondere, ist

$$f := \phi^{-1}\colon [0,2] \to [0,1]$$

eine stetige Funktion, so dass E Lebesgue-messbar ist, aber $f^{-1}(E) = F$ nicht Lebesgue-messbar ist.

□

4) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $f\colon X \times [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $a \neq b$ reell und $f(\cdot, t) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ für alle $t \in [a,b]$. Nehme zusätzlich an, dass $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ für alle x und t existiert und ein $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ existiert, so dass

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| \leq g.$$

a) Zeige, dass

$$\int_X \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t)\, d\mu = \frac{\partial}{\partial t}\int_X f(\cdot, t)\, d\mu, \quad \forall t \in [a,b].$$

Lösung: Wir definieren für ein fixiertes $t_0 \in [a,b]$:

$$h(x) := \lim_{s \to 0} \frac{f(x, t_0 + s) - f(x, t_0)}{s} = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0),$$

$$h_n := \frac{f(\cdot, t_0 + n^{-1}) - f(\cdot, t_0)}{n^{-1}} = n\left(f(\cdot, t_0 + n^{-1}) - f(\cdot, t_0)\right),$$

und es gilt $\lim_{n\to\infty} h_n \to h$. Da $\frac{\partial f}{\partial t}$ für alle $t \in [a,b]$ existiert, ist der Mittelwertsatz anwendbar und wir finden für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X$ ein $\xi_n \in [a,b]$ so dass

$$|h_n(x)| \le \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, \xi_n)\right| \le |g(x)|.$$

Insbesondere kann der Satz über die majorisierte Konvergenz angewendet werden und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\int_X f(\cdot, t_0)\, d\mu &= \lim_{n\to\infty} \frac{\int_X f(\cdot, t_0 + n^{-1})\, d\mu - \int_X f(\cdot, t_0 + n)\, d\mu}{n^{-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X h_n\, d\mu \\
&= \int_X \lim_{n\to\infty} h_n\, d\mu \\
&= \int_X h\, d\mu \\
&= \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t_0)\, d\mu.
\end{aligned}$$

Da t_0 beliebig gewählt worden ist, beendet dies den Beweis.

$\square$

b) Berechne

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n\, dm$$

für

i)

$$f_n(x) = \frac{1 + nx}{(1+x)^n},$$

Lösung: Die Funkionenfolge f_n ist dominiert durch die konstante Funktion $g \equiv 1$, die in $L^1([0,1], m)$ liegt. Deshalb können wir den Satz über die majorisierte Konvergenz anwenden:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n \, dm = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n \, dm.$$

Für $x \in (0,1]$ gilt $f_n(x) \to 0$ und weil $\{0\}$ eine Lebesgue-Nullmenge ist, er halten wir

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n \, dm = \int_0^1 0 \, dm = 0.$$

$\square$

ii)

$$f_n(x) = \frac{x \log(x)}{1 + n^2 x^2}.$$

Lösung: Wie in i) finden wir zuerst eine Majorante:

$$\left| \frac{x \log(x)}{1 + n^2 x^2} \right| \leq \frac{x^2}{1 + x^2} \leq x^2, \quad \forall x \in [0,1].$$

Offenstichtlich ist $g(x) := x^2$ in $L^1([0,1], m)$. Alle f_n sind auf $(0,1]$ stetig und der punktweise Grenzwert für $x \in (0,1]$ von $f_n(x)$ ist 0. Wir erhalten also wie in i), dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x \log(x)}{1 + n^2 x^2} \, d\mu = 0.$$

$\square$

5) Sei

$$\chi_r := \chi_{[-r,r]^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Eine Funktion $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heisst **uneigentlich Riemann integrierbar**, falls für alle $r > 0$ die Funktion $f\chi_r$ Riemann integrierbar ist, und der Grenzwert

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi_r(x) \, dx =: R(f) \in \mathbb{R}$$

existiert.

a) Sei $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann integrierbar, so dass $R(|f|) < \infty$. Zeige, dass dann $f \in \mathcal{L}^1(m)$, und ferner $R(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \, dm$ gilt.

Lösung: Wir wissen, dass

$$R(|f|) = \lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\chi_r(x)\, dx = \lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f|\chi_r\, dm,$$

cf. Satz 2.24. Da $g_n = |f|\chi_n$, $n \in \mathbb{N}$ monoton steigend ist und $\lim_{n\to\infty} \mathcal{R}(g_n) = R(|f|)$, erhalten wir mit dem Satz über monotone Konvergenz:

$$\infty > R(|f|) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_n\, dm = \int_{\mathbb{R}^n} |f|\, dm,$$

was $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, m)$ bedeutet. Da $f\chi_r$ Riemann integrierbar ist, sind auch $f^{\pm}\chi_r$ Riemann integrierbar und $R(f^{\pm})$ ist endlich weil $R(|f|) < \infty$. Insbesondere kann dasselbe Argument wie oben verwendet werden um $R(f^{\pm}) = \int_{\mathbb{R}^n} f^{\pm}\, dm$ zu schliessen. Dies zeigt dann

$$R(f) = R(f^+) - R(f^-) = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ - f^-\, dm = \int_{\mathbb{R}^n} f\, dm.$$

□

b) Finde eine uneigentlich Riemann integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass f *nicht* Lebesgue integrierbar ist.

Lösung: Wir behaupten, dass

$$f(x) := \frac{\sin(x)}{x}$$

ein solches Beispiel ist. Dazu beobachten wir, dass $\sin(x)/x$ bei 0 definiert ist mit Funktionswert 0. Somit können wir $\sin(x)/x$ als stetige Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ betrachten. Weil f zusätzlich ungerade ist, erhalten wir, dass $R(f)$ existiert, genau dann wenn

$$\lim_{r\to\infty} \int_{3\pi/2}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \chi_r(x)\, dx = \lim_{r\to\infty} \int_{3\pi/2}^{r} \frac{\sin(x)}{x}\, dx < \infty.$$

Wir zeigen letzteres mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}\int_{3\pi/2}^{r} \frac{\sin(x)}{x}\, dx &= \left[\frac{-\cos(x)}{x}\right]_{3\pi/2}^{r} - \int_{3\pi/2}^{r} \frac{-\cos(x)}{-x^2}\, dx \\ &= -\frac{\cos(r)}{r} - \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} \cdot \chi_r(x)\, dx.\end{aligned}$$

Für $r \to \infty$ geht der linke Summand oben gegen 0 weil cos beschränkt ist. Wir zeigen zuerst, dass das rechte Integral beschränkt ist – dazu verwenden wir die majorisierte Konvergenz. Da

$$\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\chi_r\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

gilt, ist $\cos(x)/x^2\chi_r$ Riemann integrierbar auf $[3\pi/2, \infty)$, und somit auch Lebesgue integrierbar mit Ober- und Unterschranke:

$$\int_{3\pi/2}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{r\to\infty} \int_{3\pi/2}^{\infty} \frac{1}{x^2}\chi_r(x)\,dx = \lim_{r\to\infty} \left(\frac{3}{2\pi} - \frac{1}{r}\right) = \frac{3}{2\pi}.$$

Nun genügt es zu zeigen, dass $\int_{3\pi/2}^{\infty} \cos(x)/x\chi_r(x)\,dx$ monton in r ist um zu schliessen, dass das obige rechte Integral existiert. Dazu beobachten wir, dass

$$\int_{3\pi/2} \frac{\cos(x)}{x^2}\chi_{\frac{3\pi}{2}+2\pi n}\,dx$$

monoton steigend in $n \in \mathbb{N}$ ist.[6] Da diese Folge auch beschränkt ist, konvergiert sie laut Bolzano-Weierstrass gegen einen endlichen Wert, was letztlich

$$\lim_{r\to\infty} \int_{3\pi/2}^{r} \frac{\sin(x)}{x}\,dx \in \mathbb{R},$$

und somit auch

$$R(f) \in \mathbb{R}$$

impliziert.

Dass dieses f nicht Lebesgue integrierbar ist folgt recht schnell aus der Periodizität von f:

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |f|\,dm \geq \frac{1}{n\pi} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin(x)|\,dx = \frac{2}{n\pi},$$

insbesondere haben wir mit monotoner Konvergenz

[6] Am besten sieht man dies mit einer Skizze und den gestauchten Bäuchen des Graphen von $\cos(x)/x^2$.

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f|\, dm &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f|\chi_{n\pi}\, dm \\
&= \lim_{n\to\infty} 2 \int_0^{n\pi} |f(x)|\, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} 2 \sum_{i=1}^{n} \int_{(i-1)\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx \\
&\geq \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

□

c) Gibt es eine uneigentlich Riemann integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass f auch Lebesgue integrierbar ist, aber $R(f) \neq \int_{\mathbb{R}^n} f\, dm$?

Lösung: Nein. Es gilt

$$
R(f) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f\chi_n\, dm = \int_{\mathbb{R}} dm,
$$

wobei wir zuerst Satz 2.24 und dann majorisierte Konvergenz mit $|f\chi_n| \leq |f| \in L^1(\mathbb{R}, m)$ verwendet haben.

□