1) Seien $(X, \mathcal{U}_X)$ und $(Y, \mathcal{U}_Y)$ zwei topologische Räume. Wir definieren eine Teilmenge $\mathcal{U} \subset 2^{X \times Y}$ so dass

$$A \in \mathcal{U} \iff A = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i$$

für Familien von offenen Mengen $U_i \in \mathcal{U}_X$, $V_i \in \mathcal{U}_Y$ für $i \in I$, und I einer Indexmenge.

Bemerkung: Man kann rechts auch expliziter schreiben

$$A = \bigcup_{\substack{U \times V \subset A \\ U \in \mathcal{U}_X, V \in \mathcal{U}_Y}} U \times V.$$

a) Zeige, dass $\mathcal{U}$ eine Topologie auf $X \times Y$ ist. Wir nennen

$$\mathcal{U}_{X \times Y} := \mathcal{U}$$

die **Produkttopologie**.

Lösung: Offensichtlich gilt $\emptyset$, $X \times Y \in \mathcal{U}$. Seien $A_j \in \mathcal{U}$ für eine beliebige Indexfamilie J und $j \in J$. Jedes A_j ist von der Form

$$A_j = \bigcup_{i \in I_j} U_{i,j} \times V_{i,j},$$

für eine Indexmenge I_j und $U_{i,j} \in \mathcal{U}_X$, $V_{i,j} \in \mathcal{U}_Y$. Es gilt

$$\bigcup_{j \in J} A_j = \bigcup_{j \in J, \, i \in I_j} U_{i,j} \times V_{i,j}.$$

Letztere Vereinigung kann als eine Vereinigung über eine einzige indexmenge K aufgefasst und somit ist $\mathcal{U}$ abgeschlossen unter beliebigen Vereinigungen.
Für endliche Schnitte seien $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}$ und wir übernehmen die Notation von oben. Dass $A_1 \cap A_2 \cap \dots A_n$ in $\mathcal{U}$ folgt aus der Tatsache, dass

$$(U \times V) \cap (W \times Z) = (U \cap W) \times (V \cap Z), \quad U, W \subseteq X, \; V, Z \subseteq Y,$$

gilt und $\mathcal{U}_X, \mathcal{U}_Y$ Topologien sind.

$\square$

b) Zeige, dass $\mathcal{U}$ die kleinste Topologie auf $X \times Y$ ist, sodass die Projektionen

$$\pi_X : X \times Y \to X$$

und

$$\pi_Y : X \times Y \to Y$$

stetig sind.

Lösung: Die kleinste Topologie $\mathcal{U}'$, so dass die Projektionen π_X und π_Y stetig sind, ist erzeugt von den Mengen

$$\pi_X^{-1}(U) = U \times Y \text{ und } \pi_Y^{-1}(V) = X \times V,$$

wobei U und V jeweils offen in X und Y sind. Es gilt dann

$$\pi_X^{-1}(U) \cap \pi_Y^{-1}(V) = U \times V,$$

also erzeugen karthesische Produkte von offenen Mengen die Topologie $\mathcal{U}'$. Insbesondere sind beliebige Vereinigungen von $U_i \times V_i$, $U_i \in \mathcal{U}_X$ und $V_i \in \mathcal{U}_Y$, in $\mathcal{U}'$ enthalten und per Definition von $\mathcal{U}$ gilt dann

$$\mathcal{U}' \supseteq U.$$

Falls wir nun zeigen können, dass π_X und π_Y bezüglich $\mathcal{U}$ stetig sind, erhalten wir Gleichheit von $\mathcal{U}$ und $\mathcal{U}'$ wegen der Minimalität von $\mathcal{U}'$. Dass aber π_X und π_Y bezüglich $\mathcal{U}$ stetig sind folgt sofort aus den ersten zwei Gleichungen oben und der Definition von $\mathcal{U}$.

$\square$

2) Sei X ein topologischer Raum und $K \subseteq X$ kompakt. Dann gilt

i) Jede geschlossene Teilmenge von K ist kompakt.

Lösung: Sei $A \subseteq K$ eine abgeschlossene Menge. Insbesondere ist $K \setminus A$ eine offene Menge in der Unterraumtopologie von K, i.e. es gibt eine offene Menge U_0 in X, so dass

$$K \setminus A = U_0 \cap K$$

gilt. Sei U_i, $i \in I$, eine beliebige offene Überdeckung von A. Dann ist

$$U_0, U_i, \quad i \in I,$$

eine offene Überdeckung von K und weil K kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung

$$U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_n}, \quad i_1, \ldots, i_n \in \{0\} \cup I$$

von K. Insbesondere Überdecken $U_{i_j} \cap K$ immernoch K. Falls $U_{i_{j'}} = U_0$ für ein j' gilt, dann ist $U_{i_{j'}} \cap K = K \setminus A$. Dann müssen aber die restlichen $U_{i_j} \cap K$ die Menge A überdecken, insbesondere bilden die restlichen U_{i_j} eine offene Teilüberdeckung der anfangs beliebig gewählten U_i. Dies zeigt, dass A kompakt ist.

$\square$

ii) Falls X Hausdorff ist und $y \in X \setminus K$, dann gibt es *disjunkte* offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $K \subseteq U$ und $y \in V$.

Lösung: Weil X Hausdorff ist und $y \notin K$ gilt, gibt es für jedes $x \in K$ disjunkte offene Mengen U_x und V_x, die jeweils x und y enthalten. Weil K kompakt ist und $\{U_x\}_{x \in K}$ eine offene Überdeckung ist, existieren endlich viele $x_1, \ldots, x_n$, so dass U_{x_i} immernoch K überdeckt. Wir definieren

$$V := \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i} \text{ und } U := \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}.$$

Beide V und U sind offen und es gilt $K \subseteq U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$ aufgrund der ursprünglichen Wahl von V_x und U_x.

$\square$

iii) Falls X Hausdorff ist, dann ist K geschlossen. Finde ein Gegenbeispiel, falls X nicht Hausdorff ist.

Lösung: Wir zeigen, dass $X \setminus K$ offen ist – für jedes $y \in X \setminus K$ gibt es zwei offene disjkunte Mengen V_y und U_y mit $y \in V_y$ und $U_y \supseteq K$, cf. ii) oben. Wir behaupten

$$X \setminus K = \bigcup_{y \in X \setminus K} V_y.$$

Die '$\subseteq$' Inklusion ist klar weil $y \in V_y$ für alle $y \in X \setminus K$. Sei also $z \in V_y$. Dann gilt $z \notin U_y$, und somit auch $z \notin K$, was äquivalent zu $z \in X \setminus K$; dies zeigt die Behauptung.

Da alle V_y offen sind, folgt aus der Behauptung also sofort, dass $X \setminus K$ offen ist, und somit auch dass K abgeschlossen ist.

Für ein Gegenbeispiel im Falle von X nicht Hausdorff, wähle $X := \{a, b\}$ mit der Topologie $\mathcal{U} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. Es einfach zu sehen, dass

X *nicht* Hausdorff ist, da die einzige offene Menge, die b enthält, X ist. Die Menge $K := \{a\}$ ist kompakt,[1] aber nicht abgeschlossen, weil $X \setminus \{a\} = \{b\}$ *nicht* offen ist.

$\square$

3) *Erinnerung Topologie:*

Sei $(X,\mathcal{U}_X)$ ein topologischer Raum. Dann ist eine *Umgebung* von einem Punkt $x \in X$ eine Menge $A \subset X$, die eine offene Menge $U \in \mathcal{U}_X$ enthält, die wiederum x enthält: $x \in U \subset A \subset X$.

Ein Raum heisst **lokal kompakt**, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung hat.

$(X,\mathcal{U}_X)$ heisst **erstabzählbar**, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine höchstens abzählbare Menge von Umgebungen $U_1, U_2, \dots$ von x gibt, so dass für jede Umgebung V von x ein k existiert mit $U_k \subset V$.

$(X,\mathcal{U}_X)$ heisst **zweitabzählbar**, wenn es eine höchstens abzählbare Menge von offenen Mengen $U_1, U_2, \dots$ gibt, so dass sich jede offene Menge $U \in \mathcal{U}_X$ als Vereinigung von Mengen U_k schreiben lässt.

$(X,\mathcal{U}_X)$ heisst separabel, wenn eine höchstens abzählbare Teilmenge $A \subset X$ existiert, so dass $\bar{A} = X$.

a) Zeige, dass jeder metrische Raum ein erstabzählbarer Hausdorffraum ist. Ist er zudem separabel, so ist er auch zweitabzählbar, und umgekehrt.

Lösung: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für zwei Punkte $x \neq y$ in X, gilt

$$B_{\varepsilon/3}(x) \cap B_{\varepsilon/3}(y) = \emptyset, \text{ wobei } 0 < \varepsilon < d(x, y).$$

Dies zeigt, dass (X, d) Hausdorff ist.

Sei $x \in X$ beliebig. Wir behaupten, dass $\{B_{1/n}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Umgebungsbasis definiert. Sei dazu V eine Umgebung von x und U die dazugehörige offene Menge, i.e. $x \in U \subseteq V$. Per definition der Topologie induziert von der Metrik d, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Insbesondere, er halten wir für $n \in \mathbb{N}$ gross genug, dass $1/n < \varepsilon$, und deshalbt $B_{1/n}(x) \subseteq U \subseteq V$. Da x beliebig war, zeigt dies, dass (X, d) erstabzählbar ist.

[1] Miniübung!

Sei jetzt (X, d) zusätzlich separabel, i.e. es existiert ein abzählbares und dichtes $A \subseteq X$. Wir behaupten, dass

$$\mathcal{E} := \left\{ B_{\frac{1}{n}}(x) \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\, x \in A \right\}$$

eine abzählbare Basis der Topologie ist. Dass $\mathcal{E}$ abzählbar ist folgt sofort aus der Tatsache, dass A und $\mathbb{N}$ abzählbar sind. Sei nun $U \subseteq X$ eine beliebige offene Menge, und wähle für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon_x > 0$, so dass $B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq U$ gilt. Für jedes $x \in U$ existiert ein $y \in A$ und $n_x \in \mathbb{N}$, so dass

$$d(x, y) < \frac{1}{2n_x} \leq \frac{\varepsilon_x}{3},$$

weil A dicht in X ist. Insbesondere gilt

$$x \in B_{\frac{1}{n_x}}(y) \subseteq B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq U.$$

Wir erhalten somit

$$U \subseteq \bigcup_{x \in U, y \in A} \underbrace{B_{\frac{1}{n_x}}(y)}_{\in \mathcal{E}} \subseteq \bigcup_{x \in U} \underbrace{B_{\varepsilon_x}(x)}_{\subseteq U} \subseteq U,$$

also haben wir U als beliebige Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{E}$ geschrieben, was zeigt, dass (X, d) zweitabzählbar ist mit Basis $\mathcal{E}$.

Für die Umkehrung, sei $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis der Topologie und wähle ein $x_i \in U_i$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Dann ist $A := \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ abzählbar und dicht in X, denn jede beliebige offene Menge U kann als Vereinigung von U_i's geschrieben werden, insbesondere existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $U_k \subseteq U$, und deshalb $x_k \in U$, was $A \cap U \neq \emptyset$ impliziert. Dies zeigt, dass A dicht ist und somit dass (X, d) separabel ist.

$\square$

b) Die Räume $\mathbb{R}^n$ sind zweitabzählbar, lokal kompakt und separabel. Zeige, dass

$$\mathbb{R}^\infty = \left\{ (a_1, a_2, \dots) \;\middle|\; a_j = 0 \text{ für fast alle } j \in \mathbb{N} \right\}$$

mit dem standard l^2-Skalarprodukt, nicht lokal kompak ist.

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und betrachte $B_\varepsilon(0)$, wobei hier 0 als die Nullfolge aufgefasst wird. Definiere für jedes $N \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$[2] die Folge $a^N \in \mathbb{R}^\infty$ als

$$a_i^N = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{6i}, & \text{falls } i = 1, \dots, N, \\ 0, & \text{falls } i \geq N + 1. \end{cases}$$

[2]Wir unterdrücken die ε-Abhängigkeit in der Notation.

Dann ist $a^N \in B_\varepsilon(0)$ für alle N, da

$$\|a^N\|_{l^2} = \left(\sum_{i=1}^{\infty}(a_i^N)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\varepsilon^2}{6^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{6}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{6}} < \varepsilon.$$

Die Folge $(a^N)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergiert aber nicht in $\mathbb{R}^\infty$, da der Grenzwert a mit

$$a_i = \frac{\varepsilon}{6i} \neq 0, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

ist. Aber jede Umgebung V von $B_\varepsilon(0)$ enthält die Folge $(a^N)_{N\in\mathbb{N}}$ und kann somit nicht kompakt sein. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, zeigt dies, dass $(\mathbb{R}^\infty, \langle\cdot,\cdot\rangle_{l^2})$ *nicht* lokal kompakt ist.

□

4) Sei X lokal kompakt und Hausdorff, und $K, U \subseteq X$ mit K kompakt, U offen und $K \subseteq U$. Zeige, dass es eine offene Menge $V \subseteq X$ gibt, sodass

$$K \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U.$$

Beweis. Zuerst beweisen wir die Aussage im Falle $\#K = 1$, i.e. $K = \{x\}$. Sei B eine kompakte Umgebung in X von x. Dann ist $F := B \setminus U$ eine geschlossene Menge von B und ist deshalb kompakt, cf. Aufgabe 2 i). Da x ausserhalb von F liegt, impliziert Aufgabe 2 ii), dass es zwei offene disjunkte Mengen W und W' gibt, so dass $x \in W$ und $F \subseteq W'$ gilt. Die Menge $V := \operatorname{int}(B) \cap W$ ist eine offene Umgebung von x, und dessen Abschluss $\bar{V}$ ist eine abgeschlossene Menge in B, also kompakt, und es gilt

$$V \subseteq B \cap W \subseteq B \setminus W' \subseteq B \setminus F \subseteq U.$$

Dies beweist die Aussage im Falle $\#K = 1$.

Wir betrachten jetzt den allgemeinen Fall. Für jedes $x \in K$ wählen wir V_x wie im ersten Teil des Beweises. Insbesondere ist $\{V_x\}_{x\in K}$ eine offene Überdeckung von K und besitzt somit eine endliche Teilüberdeckung $V_1, \ldots, V_n$, weil K kompakt ist. Definiere die offene Menge

$$V := \bigcup_{i=1}^{n} V_i.$$

Aufgrund der Wahl der V_x gilt

$$K \subseteq V,$$

dass

$$\bar{V} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{V}_i$$

kompakt ist und, dass $\bar{V}$ in U liegt. Dies beendet den Beweis.

$\square$

5) Sei $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, m)$ der Lebesgue-Massraum und

$$\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

ein C^1-Diffeomorphismus. Zeige

$$\phi_* \mathcal{A} = \mathcal{A}$$

und beweise

$$(\phi_* m)(A) = \int_A \frac{1}{|\det(d\phi) \circ \phi^{-1}|}\, dm, \quad \forall A \in \mathcal{A}.^3$$

Lösung: Zur Erinnerung:

$$\phi_* \mathcal{A} = \left\{ B \subseteq \mathbb{R}^n \;\middle|\; \phi^{-1}(B) \in \mathcal{A} \right\}$$

und $\mathcal{A}$ ist die Vervollständigung der Borel σ-Algebra $\mathcal{B}$ bezüglich des Lebesgue-Masses $\mu = m|_{\mathcal{B}}$. Da ϕ ein Homöomorphismus ist, gilt $\phi_* \mathcal{B} = \mathcal{B}$. Sei $C \in \phi_* \mathcal{A}$. Insbesondere gilt $\phi(C) \in \mathcal{A}$ und weil $\mathcal{A} = \mathcal{B}^*$ bezüglich des Lebesgue-Masses μ, gibt es A, $B \in \mathcal{B}$ mit $A \subseteq \phi(C) \subseteq B$ und $\mu(B \setminus A) = 0$. Gleichzeitig aber sind $\phi^{-1}(A)$, $\phi^{-1}(B) \in \mathcal{B}$ und

$$\phi^{-1}(A) \subseteq C \subseteq \phi^{-1}(B).$$

Falls wir zeigen können, dass $\mu(\phi^{-1}(B) \setminus \phi^{-1}(A)) = 0$, erhalten wir also $C \in \mathcal{A}$. Dazu verwenden wir die Transformationsformel cf. Theorem 2.17:

$$\begin{aligned}
\mu(\phi^{-1}(B) \setminus \phi^{-1}(A)) &= m(\phi^{-1}(B \setminus A)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\phi^{-1}(B \setminus A)}\, dm \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\phi^{-1}(B \setminus A)} \circ \phi^{-1} \cdot |\det(d\phi^{-1})|\, dm \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B \setminus A} \cdot |\det(d\phi^{-1})|\, dm.
\end{aligned}$$

[3] Zur Erinnerung: $\phi_* \mathcal{A}$ (resp. $\phi_* m$) ist definiert wie in Serie 1, Aufgabe 2 b) (resp. Serie 2, Aufgabe 3 a)).

Nun definieren wir eine Funktionenfolge

$$f_n := \chi_{B\setminus A\cap D_n} \cdot |\det(d\phi^{-1}))|, \quad n \in \mathbb{N},$$

wobei D_n abgeschlossene Bälle um den Ursprung mit Radius n sind, i.e. $D_n = \bar{B}_n(0)$. Mit dem Satz über Monotone Konvergenz erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B\setminus A} \cdot |\det(d\phi^{-1})|\, dm &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n\, dm \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \underbrace{m(B \setminus A)}_{=\mu(B\setminus A)=0} \cdot \underbrace{\max_{x\in D_n} |\det(d\phi^{-1}(x))|}_{\in\mathbb{R}} \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Zusammen mit der oberen Rechnung zeigt dies also $\mu(\phi^{-1}(B)\setminus\phi^{-1}(A)) = 0$ und somit $C \in \mathcal{A}$. Die andere Inklusion ist Analog und verwendet den Transformationssatz mit $d\phi$. Also wissen wir $\phi_*\mathcal{A} = \mathcal{A}$.

Ähnlich wie oben erhalten wir für $A \in \phi_*\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}(\phi_* m)(A) &= m(\phi^{-1}(A)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\phi^{-1}(A)}\, dm \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A \cdot |\det(d\phi^{-1})|\, dm \\ &= \int_A |\det(d\phi^{-1})| dm.\end{aligned}$$

Die gewünschte Formel folgt nun aus der Kettenregel und der Determinanten-Produktregel:

$$\begin{aligned}1 &= \det(\mathrm{id}) \\ &= \det(d(\phi \circ \phi^{-1})(x)) \\ &= \det(d\phi(\phi^{-1}(x)) \circ d\phi^{-1}(x)) \\ &= \det(d\phi(\phi^{-1}(x))) \cdot \det(d\phi^{-1}(x)),\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

$\square$