1) Zeige, dass die folgende Gleichung gilt:

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Hinweis: Verwende dazu den Satz von Fubini und die Identität

$$\int_0^t e^{-ux}\sin(x)\,dx = \frac{1}{1+u^2}\left(1-e^{-ut}(u\sin(t)+\cos(t)\right), \qquad \text{für } u>0.$$

Lösung: Die Funktion

$$h\colon [0,t]\times(0,\infty)\to\mathbb{R},\ (x,u)\mapsto |e^{-ux}\sin(x)|$$

ist, stetig und $[0,t]$ ist ein zweitabzählbarer kompakter topologischer Raum und deshalb gilt

$$\mathcal{B}_{[0,t]\times(0,\infty)} = \mathcal{B}_{[0,t]}\otimes\mathcal{B}_{(0,\infty)},$$

cf. Teil 2 von Lemma 7.6. Insbesondere ist h auch $\mathcal{B}_{[0,t]}\otimes\mathcal{B}_{(0,\infty)}$-messbar. Mit dem Satz von Fubini (i.e. Theorem 7.17) erhalten wir also

$$\begin{aligned}\int_{[0,t]\times(0,\infty)} h(x,u)\,dx\,du &= \int_0^t\left(\int_0^\infty h(x,u)\,du\right)\,dx\\ &= \int_0^t |\sin(x)|x^{-1}\,dx\\ &= \int_0^1 |\sin(x)|x^{-1}\,dx + \int_1^t |\sin(x)|x^{-1}\,dx\\ &\le C+t<\infty,\end{aligned}$$

für ein $C>0$. Also haben wir gezeigt, dass $e^{-ux}\sin(x)$ in $\mathcal{L}^1\left(\mathcal{B}_{(0,t)}\otimes\mathcal{B}_{(0,\infty)},\ \mu\otimes\mu\right)$ liegt, wobei μ dass jeweilige Lebesgue-Mass auf der Borel σ-Algebra bezeichnet. Erneutes anwenden von Fubini liefert:

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{\sin(x)}{x}\,dx &= \int_0^t \sin(x)\left(\int_0^\infty e^{-ux}\,du\right)\,dx\\ &= \int_0^\infty\left(\int_0^t e^{-ux}\sin(x)\,dx\right)\,du.\end{aligned}$$

Mit dem Hinweis erhalten wir also

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{\sin(x)}{x}\,dx &= \int_0^\infty \frac{1}{1+u^2}\,du - \int_0^\infty \frac{e^{-ut}}{1+u^2}\left(u\sin(t)+\cos(t)\right)\,du\\ &= \frac{\pi}{2} - - \int_0^\infty \frac{e^{-ut}}{1+u^2}\left(u\sin(t)+\cos(t)\right)\,du.\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass

$$\left|\int_0^\infty \frac{e^{-ut}}{1+u^2} u\sin(t)\,du\right| \leq \int_0^\infty e^{-ut}\,du = \frac{1}{t}$$

und

$$\left|\int_0^\infty \frac{e^{-ut}}{1+u^2}\cos(t)\,du\right| \leq \int_0^\infty e^{-ut}\,du = \frac{1}{t}.$$

Damit erhalten wir

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

□

2) Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ zwei σ-endliche Massräume und seien $f \in \mathcal{L}^1(\mu),\quad g \in \mathcal{L}^1(\nu)$. Definiere

$$h\colon X\times Y \to \mathbb{R},\ h(x,y) := f(x)\cdot g(y).$$

Zeige, dass $h \in \mathcal{L}^1(\mu\otimes\nu)$ und

$$\int_{X\times Y} h\,d(\mu\otimes\nu) = \int_X f\,d\mu \cdot \int_Y g\,d\nu$$

gilt.

Lösung: Betrachte die Funktion $h = f\cdot g$ als die Verkettung

$$X\times Y \xrightarrow{(f,g)} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \xrightarrow{m} \mathbb{R},$$

wobei $m(r,s) := r\cdot s$. Da $\mathbb{R}$ zweitabzählbar lokal kompakt ist und m eine stetige Abbildung ist, impliziert Lemma 7.6, dass $m\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bezüglich $\mathcal{B}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ messbar ist. Ausserdem ist (f,g) messbar weil

f und g messbar sind.[1] Insbesondere ist $h = m \circ (f, g)$ eine messbare Abbildung. Wenn man nun mit der Normfunktion weiter verkettet, zeigt das obige Argument auch, dass $|h|$ messbar ist.

Mit Fubini für positive Funktionen (i.e. Theorem 7.17) lässt sich also zeigen:

$$\begin{aligned}
\int_{X \times Y} |h| \, d(\mu \otimes \nu) &= \int_X \left(\int_Y |h|_x(y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) \\
&= \int_X \left(\int_Y |f(x)| \cdot |g(y)| \, d\nu(y) \right) d\mu(x) \\
&= \int_X |f(x)| \cdot \underbrace{\left(\int_Y |g(y)| \, d\nu(y) \right)}_{<\infty} d\mu(x) \\
&= \int_Y |g(y)| \, d\nu(y) \cdot \int_X |f(x)| \, d\mu(x) \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

weil f und g beide L^1-Funktionen sind. Dies beweist

$$h \in \mathcal{L}^1(X \times Y, \mu \otimes \nu).$$

Die Funktion $h_x(\cdot) = f(x) \cdot g(\cdot)$ ist für fast alle $x \in X$ eine L^1-Funktion, da g eine L^1 Funktion ist und $f(x)$ für fast alle $x \in X$ endlich ist, da f auch L^1 ist. Mit dem symetrischen Argument schliessen wir auch, dass h^y eine L^1-Funktion ist, und weil h auch eine L^1-Funktion ist, kann Fubini für integrierbare Funktionen (i.e. Theorem 7.20 (iii)) angewendet werden und liefert.

$$\begin{aligned}
\int_{X \times Y} h \, d(\mu \otimes \nu) &= \int_X \left(\int_Y h_x(y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) \\
&= \int_X \left(\int_Y f(x) \cdot g(y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) \\
&= \int_X f(x) \cdot \underbrace{\left(\int_Y g(y) \, d\nu(y) \right)}_{<\infty} d\mu(x) \\
&= \int_Y g(y) \, d\nu(y) \cdot \int_X f(x) \, d\mu(x).
\end{aligned}$$

Dies beendet den Beweis.

$\square$

[1] Schreibt einen kurzen Beweis aus, falls ihr euch unsicher seid!

3) Seien $X = Y = [0,1]$ und betrachte die Massräume $(X, \mathcal{A}, m)$, $(Y, 2^Y, \nu)$, wobei $\mathcal{A}$ die Lebesgue σ-Algebra, m das Lebesgue-Mass und ν das Zählmass ist. Sei $\Delta = \big\{(x,x) \,\big|\, x \in X\big\} \subseteq X \times Y$.

a) Berechne für $f = \chi_\Delta$:

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) dm(x)$$

und

$$\int_Y \left(\int_X f(x,y)\, dm(x) \right) d\nu(y).$$

Lösung: Wir beobachten, dass

$$f^y(x) = f(x,y) = \chi_{\{y\}}(x) \text{ und } f^x(y) = \chi_{\{x\}}(y)$$

und somit erhalten wir

$$\int_X f(x,y)\, dm(x) = \int_X \chi_{\{y\}}\, dm(x) = m(\{y\}) = 0,$$

und

$$\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) = \int_Y \chi_{\{x\}}\, d\nu(y) = \nu(\{x\}) = 1.$$

Damit folgt

$$\int_Y \left(\int_X f(x,y)\, dm(x) \right) d\nu(y) = 0$$

und

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) dm(x) = m(X) = 1.$$

$\square$

b) Die Ergebnisse in a) simmen *nicht* überein. Wieso ist dies kein Widerspruch zum Satz von Fubini?

Lösung: Dies ist kein Widerspruch zum Satz von Fubini, weil $(Y, 2^Y, \nu)$ *nicht* σ-endlich ist.

$\square$

4) Definiere $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \begin{cases} y^{-2} & \text{falls } 0 < x < y < 1, \\ -x^{-2} & \text{falls } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist diese Funktion Lebesgue integrierbar?

Hinweis: Verwende den Satz von Fubini.

Lösung: Wir vermuten, dass f *nicht* Lebesgue integrierbar ist und nehmen deshalb per widerspruch an, dass f doch Lebesgue integrierbar ist. Dann können wir mit dem Satz von Fubini die Intergrationsreihenfolge vertauschen und erhalten:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^y \frac{1}{y^2} dx - \int_y^1 \frac{1}{x^2} dx \right) dy = 1$$

und

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dydx = \int_0^1 \left(\int_0^x -\frac{1}{x^2} dy + \int_x^1 \frac{1}{y^2} dy \right) dx = -1 \ .$$

Diese zwei Integrale sind laut Fubini gleich, aber $1 = -1$ ist falsch; widerspruch! $\square$

5) Sei $f \in L^p(\mathbb{R}, m)$, wobei m das Lebesgue-Mass bezeichnet. Zeige folgende Gleichung mit dem Satz von Fubini:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx = p \int_0^\infty y^{p-1} m\left(\{|f| \geq y\}\right) dy.$$

Hinweis: Verwende $|f(x)|^p = \int_0^{|f(x)|} p y^{p-1} dy$.

Lösung: Die Gleichung $|f(x)|^p = \int_0^{|f(x)|} p y^{p-1} dy$ folgt aus dem Fundamentalsatz der Analysis. Wir wenden Fubini an (in der dritten Zeile) und erhalten

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{|f(x)|} p y^{p-1} \, dy \right) dx \\
&= p \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} y^{p-1} \chi_{[\,0,\,|f(x)|\,]}(y) \, dy \right) \, dx \\
&= p \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\, 0 \le y \le |f(x)|\}}(x,y) \, dx \right) y^{p-1} \, dy \\
&= p \int_{\mathbb{R}} m(\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \ge y\}) \chi_{[0,+\infty)}(y) y^{p-1} \, dy \\
&= p \int_0^{\infty} y^{p-1} m(\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \ge y\}) \, dy.
\end{aligned}
$$

$\square$