Serie 12

1. Sei $\pi\colon Y \to X$ eine Überlagerung. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.
   (a) Die Abbildung π ist ein lokaler Homöomorphismus.
   (b) Falls $\pi^{-1}(x)$ für alle $x \in X$ einelementig ist, dann ist π ein Homöomorphismus.

2. Sei $\pi\colon Y \to X$ eine Überlagerung, $A \subseteq X$ eine Teilmenge mit der Unterraumtopologie und $\tilde{A} := \pi^{-1}(A)$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung $\pi|_{\tilde{A}}\colon \tilde{A} \to A$ eine Überlagerung ist.

3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\pi_n\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^n$, eine Überlagerung ist.

4. Sei $\pi\colon Y \to X$ eine lokal triviale Faserung. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.
   (a) Sei F ein topologischer Raum. Dann ist die Menge $\{x \in X \mid \pi^{-1}(x) \cong F\}$ offen und abgeschlossen in X.
   (b) Falls X zusammenhängend ist, dann gilt $\pi^{-1}(x_1) \cong \pi^{-1}(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X$.

5. Seien X, Y, Z topologische Räume und seien $p\colon X \to Y$ und $q\colon Y \to Z$ Überlagerungen. Weiter sei $q^{-1}(z)$ für alle $z \in Z$ eine endliche Menge. Zeigen Sie, dass $q \circ p\colon X \to Z$ eine Überlagerung ist.