Serie 13

Hinweis: Mit einem Stern $(*)$ gekennzeichnete Aufgaben sind besonders schwierig.

1. Sei $Z \subseteq \mathbb{C}^*$ offen und zusammenhängend, $z_0 \in Z$ und $i\colon Z \to \mathbb{C}^*$ die Inklusion. Zeigen Sie, dass sich genau dann ein stetiger Logarithmus auf Z definieren lässt, wenn $i_*(\pi_1(Z, z_0)) \subseteq \pi_1(\mathbb{C}^*, z_0)$ die triviale Gruppe ist. Hierbei sei ein Logarithmus auf Z eine Abbildung $\log\colon Z \to \mathbb{C}$, welche $e^{\log(z)} = z$ für alle $z \in Z$ erfüllt.

2. Bestimmen Sie zwei Überlagerungen $p\colon X \to T^2$ und $p'\colon X' \to T^2$ des Torus T^2, sodass $p'\colon X \to T^2$ und $p'\colon X' \to T^2$ die gleiche (endliche) Anzahl von Blättern haben, aber sodass es keine Homöomorphismen $\phi\colon X \to X'$ und $\psi\colon T^2 \to T^2$ gibt mit $p' \circ \phi = \psi \circ p$.

3. Sei X ein wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender topologischer Raum mit endlicher Fundamentalgruppe. Zeigen Sie, dass jede stetige Funktion $f\colon X \to S^1$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

4. Sei $\pi\colon Y \to X$ eine Überlagerung. Dann heißt
$$\operatorname{Deck}(\pi) = \{\varphi\colon Y \to Y \mid \varphi \text{ ist ein Homöomorphismus}, \pi \circ \varphi = \pi\}$$
die Menge der *Decktransformationen* von π. Bestimmen Sie $\operatorname{Deck}(\pi)$ für
   (a) die universelle Überlagerung $\pi\colon \mathbb{R} \to S^1, r \mapsto e^{2\pi i r}$,
   (b) die Überlagerungen $\pi_n\colon S^1 \to S^1, z \mapsto z^n$, für $n \in \mathbb{N}$.

   Bemerkung: Die Menge $\operatorname{Deck}(\pi)$ bildet mit der üblichen Komposition von Abbildungen eine Gruppe.

5. Beschreiben Sie bis auf Isomorphie alle Überlagerungen $\pi\colon Y \to X$ von X mit wegzusammenhängendem Y, wobei
   (a) $X = S^1$,
   (b) $X = S^1 \times S^2$,
   (c) $X = S^1 \vee S^2$.

6. Sei X der Hawaiische Ohrring (vgl. Vorlesung aus Woche 10). Zeigen Sie die folgenden Aussagen.
   (a) X ist nicht semilokal einfach zusammenhängend.
   (b) Der Kegel CX über X ist semilokal einfach zusammenhängend, aber nicht lokal einfach zusammenhängend.

7. Finden Sie bis auf Isomorphie alle 2- und 3-blättrigen Überlagerungen von $S^1 \vee S^1$ und finden Sie eine Überlagerung $\pi\colon Y \to S^1 \vee S^1$, sodass $\pi_1(Y)$ unendlich erzeugt ist. $(*)$