

Serie 2

Hinweis: Mit einem Stern (*) gekennzeichnete Aufgaben sind besonders schwierig.

1. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen X und Y .
 - (a) Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn für alle abgeschlossenen Teilmengen $A \subseteq Y$ auch $f^{-1}(A) \subseteq X$ abgeschlossen ist.
 - (b) Sei $f: X \rightarrow Y$ stetig. Zeigen Sie, dass für Teilmengen $X_0 \subseteq X$ und $Y_0 \subseteq Y$ mit $f(X_0) \subseteq Y_0$ auch die Einschränkung
$$f|_{X_0}^{Y_0}: X_0 \rightarrow Y_0, \quad x \mapsto f(x),$$
stetig ist. Hierbei werden X_0 und Y_0 mit der Teilraumtopologie betrachtet.
 - (c) Sei \mathcal{B} eine Basis für die Topologie von Y . Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn $f^{-1}(V) \subseteq X$ offen ist für alle Mengen $V \in \mathcal{B}$. Es gilt eine äquivalente Aussage, wenn „Basis“ durch „Subbasis“ ersetzt wird.
2. Zeigen Sie, dass die folgenden topologischen Räume jeweils homöomorph sind.
 - (a) Das Intervall $[0, 1]$ und das Intervall $[2, 5]$.
 - (b) Das Intervall $(-1, 1)$ und \mathbb{R} .
 - (c) Die abgeschlossene Einheitskreisscheibe in \mathbb{R}^2 und das abgeschlossene Quadrat $[-1, 1] \times [-1, 1]$ in \mathbb{R}^2 .
3. Welche Teilmengen von \mathbb{Q} (betrachtet mit der induzierten Topologie von \mathbb{R}) sind zusammenhängend?
4. Seien X, Y und Z nichtleere topologische Räume.
 - (a) Sei $f: Z \rightarrow X \times Y, z \mapsto (f_X(z), f_Y(z))$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn $f_X: Z \rightarrow X$ und $f_Y: Z \rightarrow Y$ stetig sind.
 - (b) Zeigen Sie, dass X und Y genau dann wegzusammenhängend sind, wenn $X \times Y$ wegzusammenhängend ist.
5. Sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass es für jede Menge von Teilmengen $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ genau eine Topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ auf X gibt, sodass \mathcal{S} eine Subbasis von $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ ist.
Zeigen Sie weiter, dass dies die kleinste (auch grösste genannt) Topologie von X ist, die \mathcal{S} enthält, d.h. ist \mathcal{O} eine Topologie von X mit $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}$, dann gilt $\mathcal{O}_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{O}$.
6. Sei $(X, \mathcal{O}_{\text{cofin}})$ ein topologischer Raum mit der kofiniten Topologie.
 - (a) Wann ist X zusammenhängend?
 - (b) Nehmen Sie an, X habe die Kardinalität von \mathbb{R} (oder grösser). Zeigen Sie, dass X wegzusammenhängend ist.
 - (c) Nehmen Sie an, X habe abzählbar unendlich viele Elemente. Zeigen Sie, dass X nicht wegzusammenhängend ist. (*)