

Serie 3

1. Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie: X ist nicht zusammenhängend genau dann, wenn es eine stetige, surjektive Abbildung von X nach $\{0, 1\}$ mit der diskreten Topologie gibt.
2. Zeigen Sie, dass der Grenzwert einer Folge in einem Hausdorffraum, sofern er existiert, eindeutig ist.
3. Sei $(X, \mathcal{O}_{\text{cofin}})$ ein topologischer Raum mit der kofiniten Topologie.
 - (a) Zeigen Sie, dass X das Axiom T_1 erfüllt, d.h. für zwei verschiedene Punkte $a \neq b$ in X existieren offene Umgebungen von a und b , welche den jeweils anderen Punkt nicht enthalten.
 - (b) Wann ist X ein Hausdorffraum?
 - (c) Zeigen Sie, dass ein beliebiger topologischer Raum X genau dann das Axiom T_1 erfüllt, wenn alle einelementigen Teilmengen von X abgeschlossen sind.
4. Sei X eine Menge.
 - (a) Was sind die kompakten Mengen in X mit der diskreten Topologie?
 - (b) Was sind die kompakten Mengen in X mit der kofiniten Topologie?
5. (Zusammenhangskomponenten) Sei X ein topologischer Raum und sei $x_0 \in X$.
 - (a) Die Menge

$$\{x \in X \mid \exists A \subseteq X \text{ zusammenhängend mit } x_0, x \in A\}$$
 heißt *Zusammenhangskomponente* von x_0 . Zeigen Sie, dass dies die größte zusammenhängende Teilmenge von X ist, welche x_0 enthält, und weiter, dass dies eine abgeschlossene Teilmenge von X ist.
 - (b) Die Menge

$$\{x \in X \mid \text{es gibt einen Weg von } x \text{ nach } x_0\}$$
 heißt *Wegzusammenhangskomponente* von x_0 . Zeigen Sie, dass dies die größte wegzusammenhängende Teilmenge von X ist, welche x_0 enthält.
 - (c) Was sind die Zusammenhangskomponenten und Wegzusammenhangskomponenten in \mathbb{Q} ?
 - (d) Finden Sie ein Beispiel eines topologischen Raums mit einer Wegzusammenhangskomponente, die nicht abgeschlossen ist.
6. Seien X und Y nichtleere topologische Räume.
 - (a) Zeigen Sie, dass X und Y genau dann zusammenhängend sind, wenn $X \times Y$ zusammenhängend ist.
 - (b) Zeigen Sie, dass X und Y genau dann kompakt sind, wenn $X \times Y$ kompakt ist.
7. Die *Cantor-Menge* $C \subseteq \mathbb{R}$ ist wie folgt definiert. Sei

$$C_1 := [0, 1] \quad \text{und} \quad C_n := \frac{1}{3}C_{n-1} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_{n-1}\right).$$

Nachfolgend sind C_1 bis C_7 abgebildet.



Dann ist die Cantor-Menge definiert durch

$$C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Cantor-Menge abgeschlossen ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die Cantor-Menge überabzählbar ist.
- (c) Zeigen Sie, dass die Zusammenhangskomponenten von C jeweils nur aus einem Punkt bestehen.