

Serie 4

1. Seien X ein topologischer Raum, \sim eine Äquivalenzrelation auf X und $\pi: X \rightarrow X/\sim, x \mapsto [x]$. Zeigen Sie:

- (a) Die Quotiententopologie

$$\mathcal{O}_{X/\sim} := \{U \subseteq X/\sim \mid \pi^{-1}(U) \text{ ist offen in } X\}$$

ist eine Topologie auf X/\sim .

- (b) Die Abbildung π ist stetig.

- (c) $\mathcal{O}_{X/\sim}$ ist die größte (auch *feinste* genannt) Topologie auf X/\sim , sodass π stetig ist, d.h. falls \mathcal{O} eine Topologie auf X/\sim ist, sodass π stetig ist, dann gilt $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{X/\sim}$.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{D}^n = \{v \in \mathbb{R}^n \mid |v| \leq 1\}$ mit der Euklidischen Topologie ausgestattet. Wir betrachten die Äquivalenzrelation \sim gegeben durch

$$v \sim w :\Leftrightarrow v = w \text{ oder } |v| = |w| = 1.$$

Finden Sie einen zu \mathbb{D}^n/\sim homöomorphen Teilraum eines \mathbb{R}^m .

3. (Der Torus) Zeigen Sie, dass der topologische Produktraum $X_1 = S^1 \times S^1$ homöomorph zum Quotientenraum $X_2 = Q/\sim$ ist, den man erhält, wenn man auf $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ die Äquivalenzrelation $(s, 0) \sim (s, 1)$ für alle $s \in [0, 1]$ und $(0, t) \sim (1, t)$ für alle $t \in [0, 1]$ betrachtet. Dies sind zwei mögliche (äquivalente) Definitionen des Torus T^2 .

4. (Der reelle projektive Raum) Zeigen Sie, dass die unten definierten topologischen Räume X_1, X_2 und X_3 homöomorph sind. Dies sind drei mögliche (äquivalente) Definitionen des projektiven Raums $\mathbb{R}P^2$.

- (a) Sei $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ die zweidimensionale Einheitssphäre. Wir betrachten auf S^2 die Äquivalenzrelation \sim , die die Antipoden auf S^2 identifiziert, d.h. $u \sim v :\Leftrightarrow u = v$ oder $u = -v$. Dann ist der topologische Raum X_1 definiert als der Quotientenraum $X_1 := S^2/\sim$.

- (b) Wir betrachten die zweidimensionale Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ und die Äquivalenzrelation \sim auf \mathbb{D}^2 , die die Antipoden auf ihrem Rand identifiziert, d.h. $u \sim v :\Leftrightarrow u = v$ oder $u = -v$ für $u, v \in \partial\mathbb{D}^2$. Der topologische Raum X_2 ist dann der Quotientenraum $X_2 := \mathbb{D}^2/\sim$.

- (c) Sei \mathcal{L} die Menge der Geraden in \mathbb{R}^3 , die durch den Ursprung gehen. Für $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ sei $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ der Winkel zwischen L_1 und L_2 und wir definieren $d(L_1, L_2) := \alpha$. Dann definieren wir den topologischen Raum X_3 als \mathcal{L} mit der durch d induzierten Topologie.

5. Sei X ein topologischer Raum und sei $\Delta := \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$ die Diagonale von $X \times X$.

- (a) Zeigen Sie, dass X genau dann ein Hausdorffraum ist, wenn Δ in $X \times X$ abgeschlossen ist.

- (b) Sei \sim eine beliebige Äquivalenzrelation auf X und definiere $R := \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}$. Angenommen, $\pi: X \rightarrow X/\sim$ ist *offen*, d.h. das Bild $\pi(U)$ einer jeden offenen Menge $U \subseteq X$ ist offen in X/\sim . Zeigen Sie, dass X/\sim genau dann ein Hausdorffraum ist, wenn R in $X \times X$ abgeschlossen ist.

- (c) Sei G eine topologische Gruppe und H eine Untergruppe. Zeigen Sie, dass $\pi: G \rightarrow G/H, g \mapsto gH$ offen ist.

6. Sei (X, \mathcal{O}_X) ein topologischer Raum und sei ∞ ein abstraktes Symbol, welches nicht in X enthalten ist. Wir definieren die *Einpunktkompaktifizierung* (auch *Alexandroff-Kompaktifizierung* genannt) \hat{X} von X als die Menge $X \cup \{\infty\}$ mit der Topologie

$$\mathcal{O}_{\hat{X}} := \mathcal{O}_X \cup \{\{\infty\} \cup (X \setminus K) \mid K \subseteq X \text{ kompakt und abgeschlossen}\}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass \widehat{X} ein kompakter topologischer Raum ist.
- (b) Finden Sie für die Einpunktkompaktifizierung \widehat{X} folgender topologischer Räume einen Teilraum eines \mathbb{R}^m , zu dem sie homöomorph sind:
- (i) $X = [0, 1)$
 - (ii) $X = (0, 1)$
 - (iii) $X = [0, 1]$
 - (iv) $X = \mathbb{R}^n$