Korrektur zu Aufgabe 1 in Serie 3.

(*) mit infinitesimalen Elementen nicht 0

Zu zeigen: $f^{\mathcal{A}}$ ist stetig bei 0 $\Leftrightarrow$ Für alle $\mathcal{B} \succ \mathcal{A}$ bildet $f^{\mathcal{B}}$ infinitesimale Elemente auf infinitesimale Elemente ab.

"$\Rightarrow$" Beweis wie in Übungsstunde 4.

"$\Leftarrow$" Wir nehmen an, $f^{\mathcal{A}}$ ist nicht stetig bei 0, ie:

$$\cancel{\mathcal{B}}.\quad \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in \mathbb{R}\quad |x| < \delta \wedge |f^{\mathcal{A}}(x)| \geq \varepsilon$$

Wir wandeln ε zu $\frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ um, aber belassen δ:

Es gilt: $\exists n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{A} \models \varphi_n$, für die Aussage

$$\varphi_n = \forall \delta : \delta > 0 \to \left(\exists x : -\delta < x \wedge x < \delta \wedge \left(f(x) \geq \tfrac{1}{n} \vee f(x) \leq -\tfrac{1}{n}\right)\right)$$

$\mathcal{B} \equiv \mathcal{A} \Rightarrow$ Für dasselbe $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathcal{B} \models \varphi_n$.

Sei $\delta \in \mathcal{B}$ nun ein beliebiges, positives, infinitesimales Element von $\mathcal{B}$.
(*)

Dann gilt wegen $\mathcal{B} \models \varphi_n$:

$$\exists x \in \mathcal{B} : \quad |x| < \delta \quad \wedge \quad |f^{\mathcal{B}}(x)| \geq \frac{1}{n}$$

Also ist x ebenfalls infinitesimal, aber $f^{\mathcal{B}}(x)$ <u>nicht</u>.

<u>Bemerkung</u>: In "$\Rightarrow$" verwenden wir $\varphi_{n,m}$, aber in "$\Leftarrow$" verwenden wir φ_n (nur eine $n \in \mathbb{N}$).