Serie 1

In dieser ersten Serie geht es vor allem darum, sich an die grundlegenden Begriffe wie Sprache, Struktur, Terme und Formeln zu gewöhnen.

Aufgabe 1

Wir betrachten die Sprache $L_{\text{ORing}} = \{\underline{0}, \underline{1}, +, -, \cdot, <\}$ für geordnete Ringe.

(1) Schreiben Sie $\mathbb{R}$ als L_{ORing}-Struktur.

(2) Was ist $\langle\emptyset\rangle^{\mathbb{R}}$?

(3) Was ist die Komplexität der folgenden Terme?

  (a) $t = v_3$
  (b) $t = v_3 \cdot v_2 - v_3$.
  (c) $t = (\underline{1} + \underline{1} + \underline{1}) \cdot v_1 + v_2 \cdot \underline{0}$

(4) Betrachten Sie die Zuweisung $\vec{b} = (1, 2, 3, 4, \ldots)$. Schreiben Sie die Interpretation $t^{\mathbb{R}}[\vec{b}]$ für die Terme in (3).

Aufgabe 2

Wir betrachten die Sprache $L_{\text{fields}} = \{\underline{0}, \underline{1}, +, -, \cdot, \ ^{-1}\}$. Warum ist der Körper $\mathbb{R}$ *keine* L_{fields}-Struktur?

Aufgabe 3

Schreiben Sie die folgenden informellen Aussagen als L_{Ring}-Formeln oder argumentieren Sie, warum das nicht möglich ist.

(a) Für jedes v_2 gilt $v_1 \neq v_2$.

(b) $2^3 = 8$.

(c) Es gibt v_1, v_2, so dass $v_1^{v_2} = 8$.

(d) Es gibt v_1, v_2, v_3, so dass $v_1^3 + v_2^3 = v_3^3$.

(e) Es gibt eine natürliche Zahl n, mit $v_1 = n$.

(f) Es gibt eine natürliche Zahl n, die kleiner als 10 ist, so dass gilt $v_n = v_{n+1}$.

Aufgabe 4

Sei L eine Sprache und seien $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ zwei L-Strukturen. Definieren Sie eine L-Struktur $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ mit Universum $A_1 \times A_2$, das die folgende universelle Eigenschaft für die Projektionen $\pi_i \colon \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_i$ für $i = 1, 2$ erfüllt:

Für jede L-Struktur $\mathfrak{D}$ und Homomorphismen $\varphi_i \colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{A}_i$ für $i = 1, 2$, gibt es einen eindeutigen Homomorphismus $\psi \colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$, so dass $\pi_i \circ \psi = \varphi_i$.

Bemerkung: Dies ist das Produkt in der Kategorie der L-Strukturen mit Homomorphismen.

Aufgabe 5

Sei $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ eine gerichtete Familie von L-Strukturen, die alle isomorph sind $\mathfrak{A}_i \cong \mathfrak{A}_j$ für $i, j \in I$. Gilt dann

$$\bigcup_{i \in I} \mathfrak{A}_i \cong \mathfrak{A}_j$$

für alle $j \in I$?

Hinweis: Versuchen Sie es mit L_{Group} und $A_i = \mathbb{Z}$.

Aufgabe 6

Wenn Sie noch nicht so vertraut mit transfiniter Induktion und Ordinalzahlen sind, empfehlen wir noch folgende Aufgabe.

Seien $\alpha < \beta$ Ordinalzahlen. Zeigen sie, dass für alle Ordinalzahlen γ gilt

$$\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma.$$