Serie 2

In dieser Serie geht es um weitere grundlegende Begriffe wie Definierbarkeit und Theorie. In Aufgabe 4 können Sie die *Back-and-forth*-Methode anwenden, die auch in der Vorlesung wieder vorkommen wird. Die mit (K) markierten Aufgaben können mit dem Kompaktheitssatz gelöst werden.

Aufgabe 1

Wir betrachten $\mathbb{R}$ als L_{Ring}-Struktur.

(a) Zeigen Sie: Die Relation $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$ ist 0-definierbar.

(b) Ist $B = \{\sqrt{2}\}$ 0-definierbar?

(c) Zeigen Sie: Es gibt ein $r \in \mathbb{R}$, so dass $\{r\}$ nicht 0-definierbar ist.

(K)(d) Zeigen Sie: $\mathbb{N}$ ist nicht 0-definierbar.

Aufgabe 2

Eine zweistellige Relation $<$ ist eine starke Totalordnung, wenn Transitivität und Trichotomie[1] gelten. Schreiben Sie die Axiome für die Theorie der starken Totalordnungen in der Sprache $L_{\text{Ord}} = \{<\}$. Ist diese Theorie konsistent? Ist diese Theorie vollständig?

Aufgabe 3

Zeigen Sie:

(a) Wenn zwei L-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ isomorph sind, dann sind sie elementar äquivalent $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

(b) Sei L eine endliche Sprache, sei $\mathfrak{A}$ eine endliche L-Struktur und $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$ elementar äquivalent. Dann sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ isomorph.

Aufgabe 4

Zwei Strukturen heissen *partiell isomorph*, wenn es eine nicht-leere Menge $\mathcal{I}$ von Isomorphismen zwischen Unterstrukturen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gibt, die die folgende *back-and-forth*-Eigenschaften erfüllen:

1. Für jedes $f \in \mathcal{I}$ und $a \in A$ gibt es eine Erweiterung $f_a \in \mathcal{I}$ von f, die a im Definitionsbereich enthält.

2. Für jedes $f \in \mathcal{I}$ und $b \in B$ gibt es eine Erweiterung $f_b \in \mathcal{I}$, die b in ihrem Bild enthält.

Zeigen Sie, dass partiell isomorphe Strukturen elementar äquivalent sind.

Tipp: Zeigen Sie durch Induktion über die Komplexität der Formel φ, dass für alle $f \in \mathcal{I}$ und $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ mit a_i im Definitionsbereich von f gilt

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(f(\bar{a})).$$

[1] Trichotomie besagt, dass für je zwei Objekte *entweder* das Erste kleiner als das Zweite, das Zweite kleiner als das Erste oder beide gleich sind.

Aufgabe 5 (K)

Lei $L_G = \{E\}$ die Sprache der Graphen. Zeigen Sie, dass es keine L_G-Theorie gibt, so dass die Modelle der Theorie genau die zusammenhängenden Graphen sind.