Serie 3

Aufgaben 1 und 2 illustrieren wie die Modelltheorie, insbesondere das Konzept der elementaren Äquivalenz, auf andere Gebiete der Mathematik angewandt werden kann. Aufgaben 3 und 4 sind Beispiele von κ-kategorischen Theorien. Aufgabe 5 kann als Vorbereitung zum Kapitel über Quantoren-Elimination angesehen werden.

Aufgabe 1

Wir betrachten die Sprache $L = L_{\mathrm{ORing}} \cup \{f\}$, wobei f ein einstelliges Funktionssymbol ist. Sei $f^{\mathfrak{A}} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f^{\mathfrak{A}}(0) = 0$. Das Tupel

$$\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, <, f^{\mathfrak{A}})$$

ist eine L-Struktur. Wenn $\mathfrak{B}$ eine elementare Erweiterung von $\mathfrak{A}$ ist, $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, dann heisst $x \in \mathfrak{B}$ *infinitesimal*, wenn $-1/n < x < 1/n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt. Zeigen Sie:

Die Funktion $f^{\mathfrak{A}}$ ist stetig bei 0 genau dann wenn für jede elementare Erweiterung $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$, die infinitesimale Elemente $\neq 0$ hat, die Abbildung $f^{\mathfrak{B}}$ infinitesimale Elemente auf infinitesimale Elemente sendet.

Aufgabe 2

Sei G eine Gruppe und $H \prec G$ eine elementare Unterstruktur bezüglich der Sprache $L_{\mathrm{grp}} = \{\underline{e}, \circ, {}^{-1}\}$. Zeigen Sie:

(a) Wenn G eine einfache Gruppe ist, dann ist auch H eine einfache Gruppe.

(b) Jede unendliche einfache Gruppe hat eine einfache Untergruppe der Kardinalität $\aleph_0$.

Hinweis: Eine Gruppe ist einfach genau dann wenn für jedes $h \in G \setminus \{1\}$ gilt $\langle ghg^{-1} \colon g \in G \rangle = G$.

Aufgabe 3

Sei K ein Körper und $\kappa > |K|$ eine unendliche Kardinalzahl.

(a) Formulieren Sie die Theorie der unendlichen K-Vektorräume.

(b) Zeigen Sie, dass die Theorie der unendlichen K-Vektorräume κ-kategorisch ist.

(c) Angenommen $|K| = \infty$, ist die Theorie der unendlichen K-Vektorräume auch $|K|$-kategorisch?

Aufgabe 4

Betrachten Sie die Sprache der Graphen $L_{\mathrm{G}} = \{E\}$, wobei E ein zweistelliges Relationssymbol ist. Wir fassen Graphen als L_{G}-Strukturen auf, wobei die Relation E zwischen zwei Ecken gilt, wenn es eine Kante zwischen den Ecken gibt. Wir betrachten die Theorie

$$T_{\mathrm{RG}} = \{\forall x, y((E(x,y) \leftrightarrow E(y,x)) \wedge \neg E(x,x))\} \cup \{\psi_{m,n} \colon n, m \in \mathbb{N}_{\geq 0}\}$$

der Zufallsgraphen, wobei

$$\begin{aligned}\psi_{m,n} \quad = \quad & \forall x_0, \ldots, x_{m-1}, y_0, \ldots, y_{n-1} \bigwedge_{\substack{j<m \\ i<n}} \neg x_i \doteq y_i \rightarrow \\ & \exists z \bigwedge_{\substack{j<m \\ i<n}} \neg z \doteq x_i \wedge \neg z \doteq y_j \wedge E(z, x_i) \wedge \neg E(z, y_i).\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass T_{RG} $\aleph_0$-kategorisch ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Back-and-Forth Methode.

Aufgabe 5

Zeigen Sie: Jede Formel ist äquivalent zu einer Formel in *Pränex-Normalform*:

$$Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \varphi$$

wobei Q_i jeweils einer der Quantoren $\forall$ oder $\exists$ ist und φ eine Formel ohne Quantoren ist.