Serie 4

In dieser Serie geht es um die Erhaltungssätze und um erste Beispiele der Quantorenelimination. In Aufgabe 1 wird ein Beispiel gesucht, das zeigt, dass die Trennung von zwei Theorien nicht notwendigerweise symmetrisch ist. In Aufgabe 2 werden Charakterisierungen für Existenz-Formeln erarbeitet, analog zu den Charakterisierungen für Universal-Formeln (Kor. 3.13) und $\forall\exists$-Formeln (Kor. 3.17). In Aufgabe 3 wird die Morleyisierung behandelt, die erlaubt aus jeder Theorie eine Theorie mit Quantorenelimination zu machen. In Aufgabe 4 wird die Quantorenelimination an konkreten Beispielen illustriert.

Aufgabe 1

Geben Sie zwei Theorien T_1 und T_2 in einer Sprache L an, so dass T_1 und T_2 beide unendliche Modelle haben und die folgenden beiden Bedingungen gelten:

(a) Es gibt eine universelle Aussage, die T_1 von T_2 trennt.

(b) Es gibt keine universelle Aussage, die T_2 von T_1 trennt.

Hinweis: Zum Beispiel kann L_{Group} verwendet werden.

Aufgabe 2

Sei T eine L-Theorie. Analog zum Satz 3.11 über universelle Aussagen gibt es den folgenden Satz über existentielle Aussagen:

Satz: Seien T_1 und T_2 zwei Theorien. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) Es gibt eine existentielle Aussage, die T_1 von T_2 trennt.

(b) Kein Modell von T_2 ist eine Überstruktur eines Modells von T_1.

Verwenden Sie den obigen Satz, um analog zu Korollar 3.13 die folgenden Aussagen zu zeigen:

(1) Für eine Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ sind äquivalent:

  (a) φ ist modulo T äquivalent zu einer existentiellen Formel.
  (b) Für alle Modelle $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ von T und $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$ gilt: Falls $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$, dann gilt auch $\mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$.

(2) Eine Theorie T ist äquivalent zu einer existentiellen Theorie genau dann wenn für alle Strukturen $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ gilt $\mathfrak{A} \models T \implies \mathfrak{B} \models T$.

Aufgabe 3

Sei T eine L-Theorie. Sei $L^{\mathrm{m}} = L \cup \{R_\varphi\}$ eine neue Sprache, wobei R_φ ein n-stelliges Relationssymbol für jede L-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ist. Die *Morleyisierung* T^{m} ist die L^{m}-Theorie

$$T^{\mathrm{m}} = T \cup \{\forall x_1, \ldots, x_n (R_\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)) \colon \varphi \text{ ist eine } L\text{-Formel}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass T^{m} Quantorenelimination hat.

(b) Zeigen Sie: T ist eine vollständige L-Theorie genau dann wenn T^{m} eine vollständige L^{m}-Theorie ist.

Aufgabe 4

Schreiben Sie die folgenden Formeln $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ als äquivalente Formeln (modulo T) ohne Quantoren.

(a) Sei T die Theorie der $\mathbb{R}$-Vektorräume und $\varphi(x_1) = \forall v \colon x_1 + v \doteq v$

(b) Sei T die Theorie der Gruppen und $\varphi(x_1) = \exists x_2 \colon x_1 \cdot x_2 \doteq \underline{e}$.

(c) Sei $L = L_{\mathrm{ORing}}$, $T = T_{\mathrm{OField}} \cup \{\forall x \colon (x > \underline{0} \to \exists y \colon y \cdot y \doteq x)\}$ die Theorie der geordneten Körper mit Wurzeln und sei

$$\varphi(a, b, c) = \exists x \colon ax^2 + bx + c \doteq \underline{0}.$$