Serie 5

In den Aufgaben 1 und 2 zeigen Sie, dass zwei Theorien Quantorenelimination haben. In Aufgabe 3 geht es um Typen. In Vorlesung 4 haben wir gezeigt, dass jede Struktur $\mathfrak{A}$ eine elementare Erweiterung hat in der alle Typen über $\mathfrak{A}$ realisiert werden. In Vorlesung 10 werden wir Modelle finden, die einen Typ nicht realisieren.

Aufgabe 1

Sei K ein Körper und $L_{V(K)}$ die Sprache der K-Vektorräume. Zeigen Sie, dass die $L_{V(K)}$-Theorie der unendlichen Vektorräume Quantorenelimination hat und vollständig ist.

Aufgabe 2

Sei $L = \{E\}$ die Sprache der Graphen. Zeigen Sie, dass die L-Theorie des Zufallsgraphen T_{RG} (siehe Serie 3, Aufgabe 4) Quantorenelimination hat und vollständig ist.

Aufgabe 3

Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur und B eine Teilmenge des Universums von $\mathfrak{A}$. Eine Menge von $L(B)$-Aussagen $\Sigma(x)$ mit einer freien Variable x ist *endlich erfüllbar*, wenn es für jede endliche Teilmenge $\Delta(x) \subset \Sigma(x)$ ein $a \in \mathfrak{A}$ gibt mit $\mathfrak{A} \models \delta(a)$ für alle $\delta(x) \in \Delta(x)$. Die Menge $\Sigma(x)$ ist ein *partieller Typ über B* wenn sie endlich erfüllbar ist und $\Sigma(x)$ ist ein *Typ über B*, wenn sie maximal endlich erfüllbar ist.

(1) Sei $a \in \mathfrak{A}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{tp}(a/B) := \{\varphi(x) \colon \mathfrak{A} \models \varphi(a), \varphi \text{ ist eine } L(B)\text{-Formel }\}$$

ein Typ ist.

Hinweis: Für jedes $a \in \mathfrak{A}$ und jede Formel $\varphi(x)$ mit einer freien Variablen gilt $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$ oder $\mathfrak{A} \models \neg\varphi(a)$.

Für einen (partiellen) Typ $\Sigma(x)$ über B sagen wir *a realisiert* $\Sigma(x)$, wenn für alle $\varphi(x) \in \Sigma(x)$ gilt $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$. $\Sigma(x)$ *ist realisierbar über* $\mathfrak{A}$, wenn es ein $a \in \mathfrak{A}$ gibt, das $\Sigma(x)$ realisiert.

(2) Sei $L = \{<\}$. Wir betrachten $\mathbb{N}$ als L-Struktur und wählen $B = \mathbb{N}$. Sei

$$\Sigma(x) = \{x > n \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

(i) Ist $\Sigma(x)$ endlich erfüllbar?

(ii) Ist $\Sigma(x)$ ein Typ über B?

(iii) Zeigen Sie, dass $\Sigma(x)$ nicht realisierbar über $\mathbb{N}$ ist.

(iv) Finden Sie eine L-Struktur $\mathfrak{A}$, so dass $\Sigma(x)$ realisierbar über $\mathfrak{A}$ ist.

(v) Finden Sie eine L-Struktur $\mathfrak{A}$, die eine elementare Erweiterung von $\mathbb{N}$ ist, so dass $\Sigma(x)$ realisierbar über $\mathfrak{A}$ ist.

(3) Sei $a \in \mathfrak{A}$ und $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{tp}(a) = \mathrm{tp}(f(a))$.

(4) Finden Sie ein Modell $\mathfrak{A}$ von T_{DLO}, der Theorie der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte, welches zwei Elemente $a, b \in \mathfrak{A}$ enthält, so dass $\mathrm{tp}(a) = \mathrm{tp}(b)$, aber es kein $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ gibt mit $f(a) = b$.

Hinweis: In Vorlesung 5 wurde gezeigt, dass T_{DLO} vollständig ist. Versuchen Sie es mit einer disjunkten Vereinigung von Mengen mit unterschiedlicher Kardinalität, zum Beispiel $\mathbb{R} \cup \mathbb{Q}$.

(5) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, 0, +)$ als L_{Groups}-Struktur genau zwei verschiedene Typen hat, die über $\mathbb{R}$ realisierbar sind.