Serie 6

In Aufgabe 1 und 2 wird mit dem Stone Raum gearbeitet. In Aufgabe 1 werden der Kompaktheitssatz und das Trennungslemma topologisch formuliert. Die topologische Version des Trennungslemmas kann auch für andere Beweise verwendet werden, zum Beispiel Lemma 4.11.2 aus der Vorlesung. Der Satz von Vaught besagt, dass es keine abzählbaren vollständigen Theorien mit genau zwei abzählbaren Modellen gibt. In Aufgabe 3 wird gezeigt, dass es aber drei oder mehr solche Modelle geben kann.

Aufgabe 1

Sei L eine Sprache. Für $n \in \mathbb{N}$ und T eine Theorie, sei $S_n(T)$ der Stone-Raum der Typen von T. Wir betrachten zuerst den Spezialfall $S_0(\emptyset)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Elemente von $S_0(\emptyset)$ genau die vollständigen Theorien $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ für L-Strukturen $\mathfrak{A}$ sind.

(b) In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass aus dem Kompaktheitssatz folgt, dass der Stone Raum $S_n(T)$ kompakt ist. Zeigen Sie, dass die Kompaktheit von $S_0(\emptyset)$ den Kompaktheitssatz impliziert.

Verwenden Sie folgende Charakterisierung von Kompaktheit: Für jede Familie $\mathcal{U} = \{P_i\}_{i\in I}$ von abgeschlossenen Teilmengen P_i und jede endliche Teilmenge $J \subseteq I$ gilt:

$$\bigcap_{j\in J} P_j \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{i\in I} P_i \neq \emptyset.$$

(c) Sei T eine Theorie. Zeigen Sie, dass $S_0(T) = \{\mathrm{Th}(\mathfrak{A})\colon \mathfrak{A} \models T\}$. Insbesondere ist $S_0(T)$ eine kompakte Teilmenge von $S_0(\emptyset)$.

(d) Interpretieren Sie das Trennungslemma 3.7 (Vorlesung 6) als Spezialfall des folgenden Lemmas:

Lemma 1: Sei X ein topologischer Raum und $Y, Z \subseteq X$ kompakt (möglicherweise nicht Hausdorff). Sei $\mathcal{U}$ eine Familie von Mengen, die offen und abgeschlossen sind. Dann sind äquivalent:

(i) Es gibt eine positive Boolsche Kombination B aus Elementen von $\mathcal{U}$ (B besteht aus endlich vielen Vereinigungen und Schnitten aus Elementen von $\mathcal{U}$), so dass $Y \subseteq B$ und $Z \cap B = \emptyset$.

(ii) Für jedes $y \in Y$ und $z \in Z$ gibt es ein $U \in \mathcal{U}$, so dass $y \in U$ und $z \notin U$.

(e) Beweisen Sie Lemma 1.

(f) Wenden Sie Lemma 1 auf $S_n(T)$ an, um folgendes Lemma zu beweisen:

Lemma 2: Seien $C_1, C_2 \subseteq S_n(T)$ abgeschlossen und disjunkt. Dann gibt es L-Formeln φ_1, φ_2 mit $C_1 \subseteq [\varphi_1], C_2 \subseteq [\varphi_2]$ und $[\varphi_1] \cap [\varphi_2] = \emptyset$.

(g) Folgern Sie wie in der Vorlesung:

Lemma 4.11.2: Jede Teilmenge von $S_n(T)$, die sowohl abgeschlossen als auch offen ist, ist von der Form $[\varphi]$ für eine L-Formel φ.

Aufgabe 2

Beweisen Sie Lemma 4.12 aus der Vorlesung.
Lemma 4.12: Sei T eine Theorie und $p \in S_n(T)$ ein Typ von T. Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine L-Formel. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

(i) φ *isoliert* p.

(ii) $[\varphi] = \{p\}$, *das heisst* p *ist ein isolierter Punkt in* $S_n(T)$.

(iii) $p = \{\psi(\overline{x}) \colon T \vdash \forall \overline{x}\ \varphi(\overline{x}) \to \psi(\overline{x})\}$.

Hinweis: Zeigen Sie: Angenommen φ *isoliert* p *und* $\varphi \in q \in S_n(T)$, *dann ist* $p \cup q$ *konsistent mit* T.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass es für jedes $n > 2$ eine abzählbare vollständige Theorie gibt mit genau n abzählbaren Modellen, bis auf Isomorphie.

Hinweis: Betrachte $(\mathbb{Q}, <, P_1, \ldots, P_{n-2}, c_0, c_1, \ldots)$ *wobei die* P_i *eine Partitionierung in dichte Teilmengen von* $\mathbb{Q}$ *sind und die* c_i *eine aufsteigende Folge von Elementen in* P_1 *formen.*