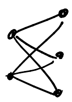
Übungsstunde, Modelltheorie
Thursday, 24 February 2022 11:16

Modelltheorie $\neq$ Kategorientheorie

L-Strukturen, Homomorphismen Objekte, Morphismen

↑ stärkere Aussagen,

Bsp: Graph, (V, E), $E \subset V \times V$, $L = \{E\}$


G

$\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ Many sorted structure

$A := V$, $E^{\mathcal{A}} = E$.

Bsp: $\mathbb{R}$, $<$, $0 < 1$ aber $1 \not< 0$

Bsp: Sei K ein Körper, K-Vektorraum-Struktur. $L = \{\underline{0}, +, (m_k)_{k \in K}\}$

$K^n = \mathcal{A} = (\{n\text{-tupel}\}, \underline{0}^{\mathcal{A}} = (0, \dots, 0), +^{\mathcal{A}}, m_k^{\mathcal{A}})$ $\rightarrow K \times V \rightarrow V$,

$+^{\mathcal{A}} : K^n \times K^n \rightarrow K^n$ $m_k^{\mathcal{A}} : K^n \rightarrow K^n$
$(v, w) \mapsto v + w$ $v \mapsto k \cdot v$

Ordinalzahlen

Def: Eine Relation $<$ ist eine Wohlordnung einer Menge A, wenn:

- $(A, <)$ ist eine totale Ordnung. $x < y < z \Rightarrow x < z$
  entweder $x < y$ oder $x = y$ oder $y < x$
- $\forall B \subset A : \exists b_0 \in B : \forall b \in B : b_0 \leq b$

Bsp: $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ✓, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ✓

✗ $\mathbb{Q}$ nicht wohlgeordnet, ✗ $\mathbb{R}$

✓ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit lexikographischer Ordnung.
(a, b), $(2, 1) > (1, 2)$, $(2, 3) > (2, 1)$

Def: $(A, <_A)$, $(B, <_B)$ sind o-isomorph, wenn eine Bijektion
$\varphi : A \rightarrow B$ existiert: $a <_A b \Leftrightarrow \varphi(a) <_B \varphi(b)$

Bsp: $\{0, 1, 2\} \cong \{-5, 2\pi, 10\}$

Bsp: $\{0,1,2\} \cong \{-5, 2\pi, 10\}$

$\mathbb{N} \cong 2\mathbb{N}$

Def: (Neumann) Eine wohlgeordnete Menge $(A,<)$ ist eine Ordinalzahl wenn:

$$\boxed{\forall a \in A : \quad a = \{b \in A : b < a\}}$$

Bsp: $A_0 = \emptyset =: 0$, $A_1 = \{\emptyset\} =: 1$, $A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} =: 2$, $< \; = \; \in$

$\forall a \in A_2$: • $a = \emptyset$: $\emptyset = \{b \in A : b < \emptyset\}$ ✓

• $a = \{\emptyset\}$: $\{\emptyset\} = \{b \in A : b < \{\emptyset\}\} = \{\emptyset\}$ ✓.

.... alle natürlichen Zahlen.

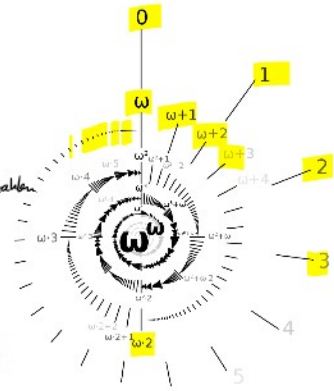
$$\omega := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} n = 0 \cup 1 \cup 2 \cup 3 \ldots = \emptyset \cup \{0\} \cup \{0,1\} \cup \{0,1,2\} \cup \ldots$$
$$= \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}.$$

$< \; = \; \in$

Prop: $\forall$ Ordonilalzahl α : ist $\boxed{\alpha \cup \{\alpha\} =: \alpha+1}$ wieder eine Ordinalzahl.

Bsp: $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$

⚠ $|\omega+1| = |\omega| =: \aleph_0$ ← abzählbar.



Def: Addition von Ordinalzahlen. $\alpha, \beta \in Or$ ← Klasse aller Ordinalzahlen

$$\alpha + \beta := \begin{cases} \alpha & \text{falls } \beta = 0 \\ \boxed{(\alpha+\beta')+1} & \text{falls } \beta = \beta'+1 \quad \leftarrow \text{Nachfolgerzahlen} \\ \bigcup_{\delta<\beta} \alpha+\delta & \text{sonst.} \quad \leftarrow \text{Limes-Zahlen.} \end{cases}$$

Bsp: $1 + 3 = (1+2)+1 = ((1+1)+1)+1 = (2+1)+1 = 3+1 = 4$

$$1 + \omega = \bigcup_{\delta < \omega} 1+\delta = 1+0 \cup 1+1 \cup 1+2 \cup 1+3 \cup \ldots$$
$$= 1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5 \cup \ldots$$
$$= \{0\} \cup \{0,1\} \cup \{0,1,2\} \cup \ldots$$
$$= \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \omega$$

⚠ $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$

Beh: $\alpha + \beta$ ist eine Ordinalzahl.

Bew: Transfinite Induktion, $\Phi(\beta) := \alpha + \beta$ ist eine Ordinalzahl.

1) $\Phi(0)$: $\alpha + 0 = \alpha$ ist Ordinalzahl ✓

Bew: Transfinite Induktion, $\Phi(\beta) :=$ $\alpha+\beta$ ist eine Ordinalzahl.

1) $\Phi(0)$: $\alpha + 0 = \alpha$ ist Ordinalzahl ✓

2) $\Phi(\beta') \Rightarrow \Phi(\beta'+1)$

$\Downarrow$

$\alpha + \beta'$ ist Ordinalzahl $\overset{\beta=\beta'+1}{\Rightarrow}$ $\alpha+\beta = (\alpha+\beta')+1$ ist Ordinalzahl, wegen Prop. ✓

3) $\forall \delta < \beta : \Phi(\delta) \Rightarrow \Phi(\beta)$

$\alpha + \delta$ ist eine Ordinalzahl $\forall \delta < \beta$

a) $(\alpha+\beta, \in)$ ist eine totale Ordnung. ←

b) $(\alpha+\beta, \in)$ ist wohlgeordnet. ←

c) $\forall a \in \alpha+\beta : a = \{ b \in \alpha+\beta : b \in a \}$

$\Rightarrow \exists \delta \in \beta : a \in \underbrace{\alpha+\delta}_{\text{Ordinalzahl}} \Rightarrow a = \{ b \in \alpha+\delta : b \in a \} = \{ b \in \alpha+\beta : b \in a \}$ $\quad \alpha+\delta < \alpha+\beta$

$\Uparrow$

$b \in a \in \alpha+\delta \underset{\text{Trans. } \in}{\Rightarrow} b \in \alpha+\delta$ ✓

□

Prop: Jede wohlgeordnete Menge $(A, <)$ ist o-isomorph zu genau einer Ordinalzahl.

Beweisidee: Transfinite Rekursion.

Für $a \in A$ definieren wir $F(a) = \{ F(b) : b < a \}$ ←

$a_0 \in A$ kleinstes Element, $F(a_0) = \emptyset = 0$

$a_1 \in A$ zweitkleinste Element, $F(a_1) = \{\emptyset\} = 1$

$\vdots$

Beh: $F(A) = \{ F(a) : a \in A \}$ ist eine Ordinalzahl

c) $\forall a \in F(A) : a = \{ b \in F(A) : b < a \}$

$F : A \longrightarrow F(A) \in Or$ ist ein o-Isomorphismus.

Jeder o-Isomorphismus $\tilde{F}$ muss $b < a \Rightarrow \tilde{F}(b) < \tilde{F}(a)$, $F = \tilde{F}$ □

$\tilde{F} : A \to \alpha$

Satz: (Wohlordnungssatz) Jede Menge A kann wohlgeordnet werden, falls Auswahlaxiom gilt.

Bew: $b \notin A$. $\forall \alpha$ Ordinalzahl:

$F(\alpha) = \{$ Wähle ein Element aus $\{ a \in A : F(\beta) \neq a \ \forall \beta \in \alpha \}$, falls möglich.

$$F(\alpha) = \begin{cases} \text{Wähle ein Element aus } \{a \in A : F(\beta) \neq a \ \forall \beta \in \alpha\}, & \text{falls möglich.} \\ b & \text{, sonst.} \end{cases}$$

$F(\overset{\alpha}{\overset{\shortparallel}{\emptyset}}) = a_0 \in A$ beliebig $\qquad \{a \in A : \cancel{F(\beta) \neq a \ \forall \beta \in \overset{\emptyset}{\overset{\shortparallel}{\alpha}}}\}$

$F(\{\emptyset\}) = a_1 \in A : \ a_1 \neq a_0 \qquad \{a \in A : F(\beta) \neq a \ \forall \beta \in \{\emptyset\}\} = \{a \in A : \overset{a_0}{\overset{\shortparallel}{F(\emptyset)}} \neq a\}$

$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = A \setminus \{a_0\}$

$\gamma := \{\alpha \in Or : F(\alpha) \neq b\}$. ist eine Ordinalzahl.

$F : \gamma \longrightarrow A$ ist eine Bijektion. $\square$

Def: $$\aleph_\alpha \underset{=}{\overset{}{\underset{\alpha}{}}} = \begin{cases} |\omega| & \text{falls } \alpha = 0 \\ |\mathcal{P}(A_{\alpha'})| & \text{, falls } \alpha = \alpha' + 1 \text{ und } |A_{\alpha'}| = \aleph_{\alpha'} . \\ \left|\bigcup_{\delta < \alpha} A_\delta\right| & \text{, falls } \alpha \text{ Limes-Zahl und } |A_\delta| = \aleph_\delta . \end{cases}$$

Bsp: $\aleph_1 = |\mathcal{P}(\omega)|$,

Bsp: $\aleph_\omega = |\omega \cup \mathcal{P}(\omega) \cup \mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega)) \cup \ldots|$

Continuumhypothese: $|\mathbb{R}| = \aleph_1$,