Modelltheorie 2. Übungsstunde

Thursday, 10 March 2022 12:13

Sprache L ⟶ Terme ⟶ Formeln $\varphi(x)$ ⟶ Aussage

↓ Modell ↓ Theorie

Aufgabe 5

Sei $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ eine gerichtete Familie von L-Strukturen, die alle isomorph sind $\mathfrak{A}_i \cong \mathfrak{A}_j$ für $i, j \in I$. Gilt dann

$$\bigcup_{i\in I} \mathfrak{A}_i \cong \mathfrak{A}_j$$

für alle $j \in I$?

Hinweis: Versuchen Sie es mit L_{Group} und $A_i = \mathbb{Z}$.

$L_{Group} = \{ e, \circ, {}^{-1} \}$,

$\mathcal{A}_i : \quad A_i = \frac{1}{2^i}\mathbb{Z}, \quad e^{\mathcal{A}_i} = 0 \in \mathbb{Z}, \quad \circ^{\mathcal{A}_i} = + : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$({}^{-1})^{\mathcal{A}_i} = - \quad \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}.$

$i = 0$

$i \in \mathbb{N}$

$f_{ij} : \mathcal{A}_i \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_j$

$A_i \ni a \mapsto \frac{1}{2^{j-i}} a$

Konstanten: e

$f_{ij}(e^{\mathcal{A}_i}) = f_{ij}(0) = 0 = e^{\mathcal{A}_j}$.

Funktionen $+$

$a, b \in A_i \qquad f_{ij}(a \underset{\circ^{\mathcal{A}_i}}{+} b) = \frac{1}{2^{j-i}}(a+b) = \frac{1}{2^{j-i}} a + \frac{1}{2^{j-i}} b = f_{ij}(a) \overset{\circ^{\mathcal{A}_j}}{+} f_{ij}(b).$

$\Rightarrow f_{ij}$ ist ein L_{Gruppe} - homomorphismus.

- Einbettung = injektiv $\wedge$ Relationen.
- surjektiv. $\quad f_{ji} = f_{ij}^{-1}$

$\Rightarrow \mathcal{A}_i \cong \mathcal{A}_j$.

$\mathcal{A} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_i \quad \leftarrow \quad i<j \Rightarrow \mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}_j$

gerichtete Familie

$e^{\mathcal{A}} = e^{\mathcal{A}_0} = e^{\mathcal{A}_1} = \ldots$

$\circ^{\mathcal{A}}(a, b) = \circ^{\mathcal{A}_j}(a, b).$

$\mathcal{A} = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \subset \mathbb{Q}$

$a \in A_i, \; b \in A_j \quad$ wlog: $i < j$

$\overset{\wedge}{A_j}$

$\hat{A}_i$

Frage: Gilt $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_i$?

Antwort: Nein. Idee: 1 Diskret?

Idee: 2 Kardinalität. $|\mathcal{A}_i| = \aleph_0 = |\mathcal{A}|$.

Idee 3: Jedes $a \in \mathcal{A}_i$ hat ein nächst grösseres. Ordnung.

$\Longrightarrow$ Idee 4: $\forall a \in \mathcal{A} : \exists b \in \mathcal{A} : \boxed{b + b = a.}$ $\leftarrow$

Angenommen, es gibt doch $f: \mathcal{A}_0 = \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$, dann

$$1 \longmapsto a$$

$$f^{-1}(\tfrac{a}{2}) \longleftarrow \tfrac{a}{2}$$

$$f\left(f^{-1}(\tfrac{a}{2}) + f^{-1}(\tfrac{a}{2})\right) = f\left(f^{-1}(\tfrac{a}{2})\right) + f\left(f^{-1}(\tfrac{a}{2})\right) = \tfrac{a}{2} + \tfrac{a}{2} = a = f(1).$$

$$\xrightarrow{f^{-1}} \quad f^{-1}(\tfrac{a}{2}) + f^{-1}(\tfrac{a}{2}) \overset{!}{=} 1 \quad \lightning$$

$\square$

φ ist Aussage, $\mathcal{A}$ ein L-Modell, T ist Theorie.

Def: $\mathcal{A} \models \varphi \;:\Longleftrightarrow\;$ „$\varphi^{\mathcal{A}}$ gilt". rekursiv. $\varphi = t_1 \doteq t_2$

$\varphi^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow t_1^{\mathcal{A}} = t_2^{\mathcal{A}}$ ..

$\mathcal{A} \models T \;:\Longleftrightarrow\; \forall \varphi \in T: \mathcal{A} \models \varphi$

$T \vdash \varphi$ (impliziert) $:\Longleftrightarrow$ Für jedes Modell $\mathcal{A}$ gilt $\boxed{\mathcal{A} \models T} \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi$.

$T \vdash T' \;:\Longleftrightarrow\; \forall \varphi \in T': T \vdash \varphi$.

$:\Longleftrightarrow\; \mathcal{A} \models T \Rightarrow \mathcal{A} \models T'$

$T \equiv T' \;:\Longleftrightarrow\; T \vdash T'$ und $T' \vdash T$ „elementar äquivalent"

Def: T ist konsistent, wenn $\exists$ Modell $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} \models T$.

Bsp: L, $\varphi = \forall x: x \doteq x \wedge \neg x \doteq x$

$T = \{\varphi\}$ ist nicht konsistent. $(A \neq \emptyset.)$

Def: T konsistent, heisst vollständig, wenn für alle L-Aussagen φ

$\boxed{T \vdash \varphi}$ oder $T \vdash \neg\varphi$.

Bsp: $L_{\text{Gruppe}} = \{e, \circ, (\cdot^{-1})\}$, T_{Gruppe} vollständig? Nein: $\varphi = \forall x, y: x \circ y \doteq y \circ x$

$\mathcal{A} = \mathbb{Z}$, $\mathcal{B} = S^3$: $\mathcal{A} \models \varphi$, $\mathcal{B} \not\models \varphi$ $\Rightarrow$ nicht $T \vdash \varphi$.

$\Rightarrow$ nicht $T \vdash \neg\varphi$.

$\Rightarrow$ nicht vollständig.

$T = T \quad \ldots \{\forall x: x \doteq e\} \quad \ldots$

$\Rightarrow$ nicht $T \vdash \{\varphi\}$

$T = T_{Gruppe} \cup \{\forall x : x \doteq \underline{e}\}$, $\quad \mathbb{Z} \not\models T$

Wenn $\mathcal{A} \models T$, dann muss $\mathcal{A}$ eine Gruppe sein mit nur einem Element. $\{0\}$, $\{1\}$

$\mathcal{A} \models T$, $\mathcal{B} \models T$, wir wissen $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Isomorphie $\xrightarrow{\text{Übung}}$ Elementar äquivalent.

$\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{B} \models \varphi$. $\Rightarrow$ Vollständig. $\leftarrow$

L_{ORing}, Archimedische Axiom: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : x < n$. $\Leftarrow$

Korrektur.

$Th(\mathbb{R}) = \{\varphi : \mathbb{R} \models \varphi\}$ sehr gross.

ist vollständig, weil $\mathcal{A} \models Th(\mathbb{R})$

$\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathbb{R} \models \varphi \iff Th(\mathbb{R}) \vdash \varphi$. Vollständig.

Es gibt keine endliche Theorie, die vollständig ist und $\mathbb{R}$ eindeutig beschreibt.

Aufgabe 1

Wir betrachten die Sprache $L_{\text{ORing}} = \{\underline{0}, \underline{1}, +, -, \cdot, <\}$ für geordnete Ringe.

(1) Schreiben Sie $\mathbb{R}$ als L_{ORing}-Struktur.

(2) Was ist $\langle\emptyset\rangle^{\mathbb{R}}$?

(3) Was ist die Komplexität der folgenden Terme?

(a) $t = v_3$

(b) $t = v_3 \cdot v_2 - v_3$. $= v_3 \cdot v_2 + (-v_3)$ $\Rightarrow$ Komplexität ist 3 — nicht 2.

(c) $t = (\underline{1} + \underline{1} + \underline{1}) \cdot v_1 + v_2 \cdot \underline{0}$ $\neq (\underline{1} + \underline{1} + \underline{1}) \cdot v_1$

(4) Betrachten Sie die Zuweisung $\vec{b} = (1, 2, 3, 4, \ldots)$. Schreiben Sie die Interpretation $t^{\mathbb{R}}[\vec{b}]$ für die Terme in (3).

Aufgabe 2

Wir betrachten die Sprache $L_{\text{fields}} = \{\underline{0}, \underline{1}, +, -, \cdot, ^{-1}\}$. Warum ist der Körper $\mathbb{R}$ *keine* L_{fields}-Struktur?

0^{-1} ist nicht definiert.

$\langle S\rangle^{\mathbb{R}}$ wenn $S \neq \emptyset$.

Wenn L keine Konstanten hat, dann wäre $\emptyset$ eine "L-Struktur" was nicht erlaubt ist.

(2) $\left.\begin{array}{l} \underline{0}^{\mathbb{R}} \in \langle\emptyset\rangle^{\mathbb{R}} \\ \underline{1}^{\mathbb{R}} \in \langle\emptyset\rangle^{\mathbb{R}} \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \in \langle\emptyset\rangle^{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow \underline{\langle\emptyset\rangle^{\mathbb{R}} = \mathbb{Z}}$.

Die Variablen sind:

$v_0, v_1, v_2, \ldots$

Sei $x \in \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$

(4). $\vec{b} = (1, 2, 3, 4)$ mit $v_0 \mapsto 1$, $v_1 \mapsto 2$, $v_2 \mapsto 3$, $v_3 \mapsto 4$

(4 a) $t^{\mathbb{R}}[\vec{b}] = 4$.

$t = v_3 \cdot v_2 - v_3 = +(v_3 \cdot v_2, -v_3) = +(\cdot(v_3, v_2), -(v_3))$

Aufgabe 3

Schreiben Sie die folgenden informellen Aussagen als L_{Ring}-Formeln oder argumentieren Sie, warum das nicht möglich ist.

$\neg \exists v_2 : v_1 \doteq v_2 \quad = \psi$

(a) Für jedes v_2 gilt $v_1 \neq v_2$. $\quad \forall v_2 : \neg v_1 \doteq v_2 \quad = \quad \neg \exists v_2 \neg(\neg v_1 \doteq v_2) = \varphi$

(b) $2^3 = 8$. $\quad (\underline{1}+\underline{1}) \cdot (\underline{1}+\underline{1}) \cdot (1+1) = \underline{1} + \underline{1} + \dots + \underline{1}$

(c) Es gibt v_1, v_2, so dass $v_1^{v_2} = 8$. $\quad$ nicht ausdruckbar.

(d) Es gibt v_1, v_2, v_3, so dass $v_1^3 + v_2^3 = v_3^3$.

(e) Es gibt eine natürliche Zahl n, mit $v_1 = n$. $\quad \exists n \in \mathbb{N} : v_1 \doteq n$. geht nicht.

(f) Es gibt eine natürliche Zahl n, die kleiner als 10 ist, so dass gilt $v_n = v_{n+1}$.

$v_0 \doteq v_1 \lor v_1 \doteq v_2 \lor \dots \lor v_9 = v_{10}$.

(e) Kompaktheitssatz: Wenn für jede endliche Teilmenge $\Delta \subset T$ ein Modell $\mathcal{A}_\Delta$ existiert $\mathcal{A}_\Delta \models \Delta$.
Dann gibt es auch ein Modell, $\mathcal{A} \models T$.

Angenommen es gibt eine Formel $\varphi(v_1)$ (L_{Ring} - Formel) die besagt $\exists n \in \mathbb{N} : v_1 \doteq n$. $\quad \{\underline{1}, \underline{1}+\underline{1}, \underline{1}+\underline{1}+\underline{1}, \dots\}$

Definiere $L' = L_{\text{Ring}} \cup \{a\}$ und a Konstantensymbol.

L' - Formel $\psi_n = (\neg a \doteq \underbrace{\underline{1} + \underline{1} + \dots + \underline{1}}_{n\text{-viele}}) \land \varphi(a)$, für $n \in \mathbb{N}$.

$T' = T_{\text{Ringe}} \cup \{\psi_n : n \in \mathbb{N}\}$

Sei $\Delta \subset T'$ endlich, $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \psi_n \notin \Delta$

$\mathcal{A}_n = \mathbb{Z}, \quad a^{\mathcal{A}_n} = N+1. \quad \mathcal{A}_n \models T_{\text{Ring}}, \quad \mathcal{A}_n \models \psi_n$ für $n < N$.

$\mathcal{A}_n \models \Delta, \quad \Delta \subset T'$

$\Rightarrow \exists$ Modell : $\mathcal{A} \models T. \Rightarrow a^{\mathcal{A}}$,

$\forall n \in \mathbb{N} : \psi_n \Rightarrow a^{\mathcal{A}} \neq n \land a^{\mathcal{A}} \in \mathbb{N}$. $\lightning$

Aufgabe 4

Sei L eine Sprache und seien $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ zwei L-Strukturen. Definieren Sie eine L-Struktur $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ mit Universum $A_1 \times A_2$, das die folgende universelle Eigenschaft für die Projektionen $\pi_i : \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_i$ für $i = 1, 2$ erfüllt:

Homo.

Für jede L-Struktur $\mathfrak{D}$ und Homomorphismen $\varphi_i : \mathfrak{D} \to \mathfrak{A}_i$ für $i = 1, 2$, gibt es einen eindeutigen Homomorphismus $\psi : \mathfrak{D} \to \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$, so dass $\pi_i \circ \psi = \varphi_i$.

Bemerkung: Dies ist das Produkt in der Kategorie der L-Strukturen mit Homomorphismen.

Relationen in $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ $\qquad D \xrightarrow{\exists \psi} \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$

$R \in I \quad R^{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}} \qquad \downarrow \pi_i$

Relationen in $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \arrow[d, "\pi_i"] \\ & \mathcal{A}_i \end{tikzcd}$$

$R \in L$, $\quad R^{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}} \subset (\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)^n$.

Damit $\pi_i : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \longrightarrow \mathcal{A}_i$ ein Homomorphismus ist, muss R .