Übungsstunde 3

Thursday, 24 March 2022 12:05

Aufgabe 1

Wir betrachten $\mathbb{R}$ als L_{Ring}-Struktur.

(a) Zeigen Sie: Die Relation $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$ ist 0-definierbar.

(b) Ist $B = \{\sqrt{2}\}$ 0-definierbar?

(c) Zeigen Sie: Es gibt ein $r \in \mathbb{R}$, so dass $\{r\}$ nicht 0-definierbar ist.

(K)(d) Zeigen Sie: $\mathbb{N}$ ist nicht 0-definierbar.

A ist definierbar wenn es ein φ gibt: $A = \{ \bar{a} \in \mathbb{R}^n : \mathbb{R} \models \varphi(\bar{a}) \}$

(a) $\varphi(x,y) = \exists z : x + z \cdot z \doteq y \wedge \neg x \doteq y$

Note: Geht über $\mathbb{R}$, aber nicht $\mathbb{Q}$.

(b) $\psi(x) = x \cdot x \doteq \underline{1} + \underline{1} \wedge \varphi(0, x)$

(c) $r = \pi$, $r = e$

Bem: $|\{L_{\text{Ring}}\text{-Formeln}\}| = \aleph_0$, es gibt aber $|\mathbb{R}| > \aleph_0$.

$\Rightarrow$ Es gibt reelle Zahlen, die keine definierende Formel φ haben.

(d) Wir nehmen an es gibt φ, $\mathbb{N} = \{ a \in \mathbb{R} : \mathbb{R} \models \varphi(a) \} = \{ \underline{0}^{\mathbb{R}}, \underline{1}^{\mathbb{R}}, \underline{1} \overset{\mathbb{R}}{+} \underline{1}^{\mathbb{R}}, \dots \}$.

$L' = L_{\text{Ring}} \cup \{a\}$ $\quad a$ Konstantensymbol

$\psi_n(x) = \varphi(a) \wedge a \overset{\text{siehe a)}}{>} \underbrace{\underline{1} + \underline{1} + \dots + \underline{1}}_{n\text{-mal}}$

$T' = T_{\text{Ring}} \cup \{ \psi_n : n \in \mathbb{N} \}$

$\Delta \subset T'$ endlich, $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \psi_n \notin \Delta$.

$A_n = \mathbb{Z}$ und $a^{\mathcal{A}_n} = N + 1$, $\quad \mathcal{A}_n \models \Delta$.

$\overset{\text{Kompakt.}}{\Longrightarrow}$ $\exists \mathcal{A} \models T'$, $\quad a^{\mathcal{A}}$ erfüllt $\varphi(a^{\mathcal{A}})$ " ist natürliche Zahl.

aber $a^{\mathcal{A}} > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. $\lightning$

Aufgabe 3

Zeigen Sie:

(a) Wenn zwei L-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ isomorph sind, dann sind sie elementar äquivalent $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

(b) Sei L eine endliche Sprache, sei $\mathfrak{A}$ eine endliche L-Struktur und $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$ elementar äquivalent. Dann sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ isomorph.

(a) $f : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$ isomorph.

Ziel: φ Aussage gilt $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$.

$\Uparrow$

Beh: Für jede φ Formel und jede $\bar{a} \in \mathcal{A}^n$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi(f(\bar{a}))$

1. $\varphi = t_1 \doteq t_2$ $\qquad (\vec{b})_i = \begin{cases} a_i & \text{wenn } v_i \text{ die entsprechende Variable ist} \\ a_0 & \end{cases}$

$$\mathcal{A} \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow t_1^{\mathcal{A}}[\vec{b}] = t_2^{\mathcal{A}}[\vec{b}]$$

$$\Leftrightarrow f(t_1^{\mathcal{A}}[\vec{b}]) = f(t_2^{\mathcal{A}}[\vec{b}])$$

$$\overset{\text{Lemma 1.12}}{\Leftrightarrow} t_1^{\mathcal{B}}[f(\vec{b})] = t_2^{\mathcal{B}}[f(\vec{b})]$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[f(\vec{b})] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi(f(\bar{a}))$$

2. $\varphi = R\, t_1 \ldots t_n$.

3. $\varphi = \neg \psi$

$$\mathcal{A} \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \neg\psi[\vec{b}] \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{Nicht } \mathcal{A} \models \psi[\vec{b}]$$

$$\overset{\text{Ind.}}{\Leftrightarrow} \text{Nicht } \mathcal{B} \models \psi[f(\vec{b})]$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi(f(\bar{a})).$$

4. $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$

5. $\varphi = \exists x\, \psi$ $\qquad \left(\vec{b}\frac{a}{x}\right)_i = \begin{cases} a & \text{falls } x = v_i \\ b_i & \text{sonst} \end{cases}$

$$\mathcal{A} \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow \text{Es gibt } a \in A : \ \mathcal{A} \models \psi[\vec{b}\tfrac{a}{x}]$$

$$\overset{\text{Ind}}{\Leftrightarrow} \text{Es gibt } a \in A : \ \mathcal{B} \models \psi[f(\vec{b}\tfrac{a}{x})] = \psi[f(\vec{b})\tfrac{f(a)}{x}]$$

$$\Leftrightarrow \text{Es gibt } \underset{\overset{\shortparallel}{f(a)}}{b} \in B \quad \mathcal{B} \models \psi[f(\vec{b})\tfrac{b}{x}]$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{B} \models \exists x\, \psi[\vec{b}] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi(f(\bar{a}))$$

$\square$

(b) $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$, $\quad |A| < \infty$. $\quad |L| < \infty$.

$$z : A \longrightarrow \{1, 2, \ldots, |A|\}$$

Für $c \in L$ Konstante, sei $\varphi_c = c \doteq v_{z(c^{\mathcal{A}})}$

Für $f \in L$ Funktion $\psi_f(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}) = f(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}) \doteq v_{z(f^{\mathcal{A}}(z^{-1}(i_1), \ldots, z^{-1}(i_n)))}$

Für $R \in L$ Relation $\vartheta_R(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}) = R(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n})$

$$\alpha(v_1, \ldots, v_{|A|}) = \forall v_0 : \bigvee_{i=1}^{|A|} v_0 \doteq v_i \wedge \bigwedge_{i \neq j} \neg v_i \doteq v_j$$

$$\wedge \bigwedge_{c \in L} \varphi_c \wedge \bigwedge_{\substack{f \in L \\ i_1, \ldots, i_n}} \psi_f(v_{i_1}, \ldots v_{i_n}) \wedge \bigwedge_{\substack{R \in L \\ i_1 \ldots i_n : \\ R^{\mathcal{A}}(z^{-1}(i_1), \ldots, z^{-1}(i_n))}} \vartheta_R(v_{i_1} \ldots v_{i_n})$$

$\mathcal{A} \models \exists v_1, \ldots v_{|A|} : \alpha(v_1 \ldots v_{|A|})$. weil $v_i^{\mathcal{A}} = z^{-1}(i) \in A$.

$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} \models \exists v_1 \ldots v_{|A|} : \alpha(v_1 \ldots v_{|A|})$.

Sei also $b_1, \ldots, b_{|A|}$ die $\mathcal{B} \models \alpha(b_1 \ldots b_{|A|})$.

$$h : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$$
$$z^{-1}(i) = v_i^{\mathcal{A}} \longmapsto v_i^{\mathcal{B}} = b_i$$

- h ist Bijektiv

- $h(c^{\mathcal{A}}) \overset{\varphi_c}{=} h(v^{\mathcal{A}}_{z(c^{\mathcal{A}})}) = v^{\mathcal{B}}_{z(c^{\mathcal{A}})} \overset{\varphi_c}{=} c^{\mathcal{B}}$

- $f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(v^{\mathcal{A}}_{z(a_1)}), \ldots, h(v^{\mathcal{A}}_{z(a_n)}))$

$$= f^{\mathcal{B}}(v^{\mathcal{B}}_{z(a_1)}, \ldots, v^{\mathcal{A}}_{z(a_n)})$$

$$\overset{\mathcal{B} \models \psi_f}{=} v^{\mathcal{B}}_{z(f^{\mathcal{A}}(z^{-1}(z(a_1)), \ldots, z^{-1}(z(a_n))))}$$

$$= h(v^{\mathcal{A}}_{z(f^{\mathcal{A}}(z^{-1}(z(a_1)), \ldots z^{-1}(z(a_n))))})$$

$$\overset{\mathcal{A} \models \psi_f}{=} h(f^{\mathcal{A}}(v^{\mathcal{A}}_{z(a_1)}, \ldots, v^{\mathcal{A}}_{z(a_n)}))$$

$$= h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)).$$

- $R^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \iff R^{\mathcal{A}}(v^{\mathcal{A}}_{z(a_1)}, \ldots v^{\mathcal{A}}_{z(a_n)})$

$\cdot\ R^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \iff R^{\mathcal{A}}(v^{\mathcal{A}}_{z(a_1)}, \dots, v^{\mathcal{A}}_{z(a_n)})$

$\overset{\mathcal{V}_R}{\iff} R^{\mathcal{B}}(v^{\mathcal{B}}_{z(a_1)}, \dots, v^{\mathcal{B}}_{z(a_n)})$

$\iff R^{\mathcal{B}}(h(v^{\mathcal{A}}_{z(a_1)}), \dots, h(v^{\mathcal{A}}_{z(a_n)})) \iff R^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$.

Aufgabe 4

Zwei Strukturen heissen *partiell isomorph*, wenn es eine nicht-leere Menge $\mathcal{I}$ von Isomorphismen zwischen Unterstrukturen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gibt, die die folgende *back-and-forth*-Eigenschaften erfüllen:

1. Für jedes $f \in \mathcal{I}$ und $a \in A$ gibt es eine Erweiterung $f_a \in \mathcal{I}$ von f, die a im Definitionsbereich enthält.
2. Für jedes $f \in \mathcal{I}$ und $b \in B$ gibt es eine Erweiterung $f_b \in \mathcal{I}$, die b in ihrem Bild enthält.

Zeigen Sie, dass partiell isomorphe Strukturen elementar äquivalent sind.

Tipp: Zeigen Sie durch Induktion über die Komplexität der Formel φ, dass für alle $f \in \mathcal{I}$ und $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ mit a_i im Definitionsbereich von f gilt

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(f(\bar{a})).$$

1. $\varphi = t_1 \doteq t_2$, $\quad \mathcal{A} \models \varphi(\bar{a}) \overset{A3(a)}{\iff} \mathcal{B} \models \varphi(f(\bar{a}))$

$f: \mathcal{A}' \to \mathcal{B}'$

2. $\varphi = R t_1 \dots t_n$. ✓

3. $\varphi = \neg \psi$

4. $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$

$(\vec{b})_i = \begin{cases} \bar{a}_i & \text{wenn } v_i \text{ entspricht } a_i. \\ a_0 & \text{sonst} \end{cases}$

5. $\varphi = \exists x\, \psi(x)$, $\quad \mathcal{A} \models \varphi(\bar{a}) \iff$ Es gibt $a \in A$: $\mathcal{A} \models \psi(\vec{b}\frac{a}{x})$

$\times\ \mathcal{B} \models \psi(f(\vec{b}\frac{a}{x}))$.

Erweitern $f_a: \mathcal{A}'' \to \mathcal{B}''$, $\mathcal{A}'' \ni a$

"$\Rightarrow$"

$\Rightarrow$ Es gibt $b \in B$: $\mathcal{B} \models \psi(f_a(\vec{b})\frac{b}{x}) = \psi(f(\vec{b})\frac{b}{x})$

$\Rightarrow \mathcal{B} \models \exists x\, \psi\, [f(\vec{b})] \iff \mathcal{B} \models \varphi(f(\bar{a}))$

"$\Leftarrow$" $\quad \mathcal{B} \models \varphi(f(\bar{a})) \iff$ Es gibt $b \in B$: $\mathcal{B} \models \psi(f(\vec{b})\frac{b}{x})$

$f_b: \mathcal{A}''' \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}'''$, $\mathcal{B}''' \ni b$

Es gibt $b \in B$: $\mathcal{B} \models \psi(f_b(\vec{b})\frac{b}{x})$

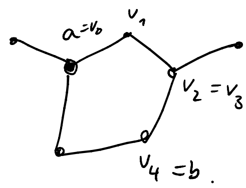
$\Rightarrow$ Es gibt $a \in A$: $\mathcal{A} \models \psi(\vec{b}\frac{a}{x}) \Rightarrow \mathcal{A} \models \exists\psi(\bar{a})$.

Aufgabe 5 (K)

Lei $L_G = \{E\}$ die Sprache der Graphen. Zeigen Sie, dass es keine L_G-Theorie gibt, so dass die Modelle der Theorie genau die zusammenhängenden Graphen sind.

Angenommen es gibt eine L_G-Theorie T, der zusammenhängenden Graphen

$L' = L_G \cup \{a, b\}$ $\quad$ a, b Konstanten.



$T' = T \cup \{\psi_n : n \in \mathbb{N}_{>1}\}$.

$\psi_n =$ " a und b sind mindestens n weit voneinander entfernt."

$$= \neg\left(\exists v_0, \dots v_{n-1} : v_0 \doteq a \wedge v_{n-1} \doteq b \wedge \bigwedge_{i=0}^{n-2} E(v_i, v_{i+1}) \vee v_i \doteq v_{i+1}\right)$$

$\Delta \subset T'$, $|\Delta| < \infty$, Es gibt Modelle $\mathcal{A} \models \Delta$

$\mathcal{A} =$ ——•——•——, $\mathbb{Z}$, $E^{\mathcal{A}} = \{(x, y) : |x - y| = 1\}$.

$a^{\mathcal{A}} = 0$, $b^{\mathcal{A}} = N$ so dass $\psi_n \notin \Delta$ $\forall n > N$.

$\overset{\text{Kplet}}{\Rightarrow}$ $\exists \mathcal{A}' \models T'$, $a^{\mathcal{A}'}$, $b^{\mathcal{A}'}$ müssen mindestens n voneinander entfernt sein, $\forall n \in \mathbb{N}$.

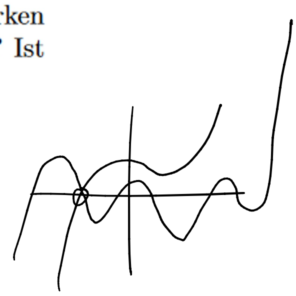
$\Rightarrow$ nicht zusammenhängend. aber $\mathcal{A} \models T$ $\lightning$.

$\square$

Aufgabe 2

Eine zweistellige Relation $<$ ist eine starke Totalordnung, wenn Transitivität und Trichotomie[1] gelten. Schreiben Sie die Axiome für die Theorie der starken Totalordnungen in der Sprache $L_{\text{Ord}} = \{<\}$. Ist diese Theorie konsistent? Ist diese Theorie vollständig?

Ist $\{\pi\}$ definierbar in $\mathbb{R}$ als R_{Rig}-Sprache?



Real closed fields, reell abgeschlossene Körper.

$L_{\text{Rig}} \cup \{<\}$, $\quad T_{RC} = T_{\text{Körper}} \cup T_{\text{tot}} \cup \{\forall x y\ (x > 0 \wedge y > 0 \rightarrow x + y > 0)\}$

$L_{Ring} \cup \{<\}$, $\quad T_{RC} = T_{Körper} \cup T_{tot} \cup \{\forall x y\ (x > \underline{0} \wedge y > \underline{0} \to x+y > 0 \wedge x \cdot y > 0)\}$

$\cup \{\forall x\ (x > 0 \to \exists y : y \cdot y = x)\}$

$\cup \{\forall a_0 \ldots a_n\ (\neg a_n \doteq \underline{0} \to \exists x\ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \doteq 0) : n \text{ ungerade}\}$

$\mathbb{R} \models T_{RC}$

$\overline{\mathbb{Q}}^{RC}$ = reeller Abschluss von $\mathbb{Q}$. $\models T_{RC}$.

<u>Theorem:</u> T_{RC} vollständig.

Falls $\varphi(x)$ eine Formel mit $\{\pi\} = \{a \in \mathbb{R} : \mathbb{R} \models \varphi(a)\}$.

$\mathbb{R} \models \exists x\ \varphi(x)$.

$\xRightarrow{T_{RC}}$ $\overline{\mathbb{Q}}^{RC} \models \exists x\ \varphi(x)$. aber das gilt nicht. π transzendent.