Übungsstunde 4

Thursday, 7 April 2022 09:30

Aufgabe 1

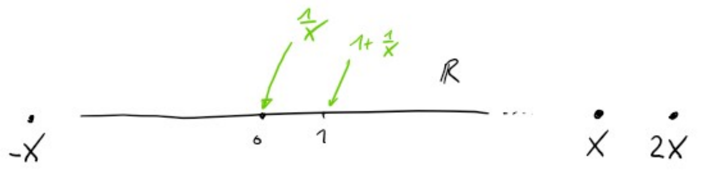
Wir betrachten die Sprache $L = L_{\mathrm{ORing}} \cup \{f\}$, wobei f ein einstelliges Funktionssymbol ist. Sei $f^{\mathfrak{A}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f^{\mathfrak{A}}(0) = 0$. Das Tupel

$$\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, <, f^{\mathfrak{A}})$$

ist eine L-Struktur. Wenn $\mathfrak{B}$ eine elementare Erweiterung von $\mathfrak{A}$ ist, $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, dann heisst $x \in \mathfrak{B}$ *infinitesimal*, wenn $-1/n < x < 1/n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt. Zeigen Sie:

Die Funktion $f^{\mathfrak{A}}$ ist stetig bei 0 genau dann wenn für jede elementare Erweiterung $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$, die Abbildung $f^{\mathfrak{B}}$ infinitesimale Elemente auf infinitesimale Elemente sendet.

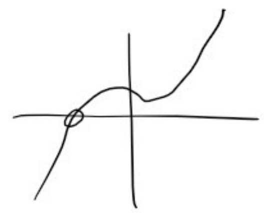
<u>Background</u>: Reell-abgeschlossenen Körper.



$\mathbb{R}(X)$, $\quad r < X \quad \forall r \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{r} > \frac{1}{X} \quad \forall r \in \mathbb{R}_{>0}$

Infinitesimaler Element.



$\varphi = \forall x : x > 0 \longrightarrow \exists y : y \cdot y \doteq x$

$\psi_n = \forall a_0, a_1 .. a_{2n+1} : \neg a_{2n+1} \doteq \underline{0} \longrightarrow \exists x : a_{2n+1} \cdot x^{2n+1} + \dots + a_1 x + a_0 \doteq \underline{0}$

Reelle Abschluss: $\overline{\mathbb{R}(X)}^r \models T_{RC} = T_{\mathrm{OFields}} \cup \{\varphi, (\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$

$\mathbb{R} \models T_{RC}$ ← vollständig.

elementare Erweiterung.

"$\Rightarrow$" $f^{\mathcal{A}}$ stetig. $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} : |x| < \delta \Rightarrow |f^{\mathcal{A}}(x)| < \varepsilon$.

$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists m \in \mathbb{N} : \mathcal{A} \models \varphi_{m,n}$

$\varphi_{m,n} = \forall x \left(-\frac{1}{m} < x \wedge x < \frac{1}{m}\right) \longrightarrow \left(-\frac{1}{n} < f(x) \wedge f(x) < \frac{1}{n}\right)$

$\mathcal{B}$ elementar $\Rightarrow$ $\quad \forall n \in \mathbb{N} \ \exists m \in \mathbb{N} : \mathcal{B} \models \varphi_{m,n}$

x infinitesimal: ie: $\forall m \in \mathbb{N} : -\frac{1}{m} < x < \frac{1}{m}$.

$\Longrightarrow -\frac{1}{n} < f^{\mathcal{B}}(x) < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f^{\mathcal{B}}(x)$ ist inf.

"$\Leftarrow$" Sei $f^{\mathcal{A}}$ nicht stetig: $\quad \exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in \mathbb{R} : |x| < \delta \wedge |f^{\mathcal{A}}(x)| \geq \varepsilon$

$\exists n \in \mathbb{N} \ \forall m \in \mathbb{N} : \mathcal{A} \models \psi_{n,m}$

$\exists n \in \mathbb{N} \; \forall m \in \mathbb{N} \; : \; \mathcal{A} \models \psi_{n,m}$

$$\psi_{n,m} = \exists x \; \left(-\tfrac{1}{m} < x < \tfrac{1}{m}\right) \wedge \left(f(x) \leq -\tfrac{1}{n} \vee \tfrac{1}{n} \leq f(x) \right)$$

$\exists n \in \mathbb{N} \; \underline{\forall m \in \mathbb{N}} : \; \mathcal{B} \models \psi_{n,m}$

Dieses $x \in \mathcal{B}$ ist infinitesimal $\wedge$ $\exists n \in \mathbb{N}: \; |f^{\mathcal{B}}(x)| \geq \frac{1}{n}$

$\hookrightarrow$ $f^{\mathcal{B}}(x)$ ist kein infinitesimales Element.

$\rightsquigarrow$ Nicht-Standandard-Analysis.

Aufgabe 2

Sei G eine Gruppe und $H \prec G$ eine elementare Unterstruktur bezüglich der Sprache $L_{\text{grp}} = \{\underline{e}, \circ, ^{-1}\}$. Zeigen Sie:

(a) Wenn G eine einfache Gruppe ist, dann ist auch H eine einfache Gruppe.

(b) Jede unendliche einfache Gruppe hat eine einfache Untergruppe der Kardinalität $\aleph_0$.

Hinweis: Eine Gruppe ist einfach genau dann wenn für jedes $h \in G \setminus \{1\}$ gilt $\langle ghg^{-1} : g \in G \rangle = G$.

$g_1 h g_1^{-1}, \; g_2 h g_2^{-1}$

a) $H \prec G$,

Sei $h \in G \setminus \{\underline{e}^G\}$, $g_0 \in G$.

Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$: und $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ $\qquad G \models \psi_{n,\bar{\varepsilon}}(g_0, h)$

$$\psi_{n,\bar{\varepsilon}}(g,h) = \exists g_1 \ldots g_n : \; g_0 \doteq (g_1 h g_1^{-1})^{\varepsilon_1} \cdot (g_2 h g_2^{-1})^{\varepsilon_2} \cdot \ldots (g_n h g_n^{-1})^{\varepsilon_n}$$

Sei jetzt $g_0 \in H \overset{G}{\cup}$ und $h \in H \setminus \{\underline{e}^H\} \subset G \setminus \{\underline{e}^G\}$

elementar. $\exists n \in \mathbb{N}: \; \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n \in \{\pm 1\} : \; H \models \psi(g_0, h)$

$\underline{\forall g_0 \in H}: \quad g_0 \in \langle ghg^{-1} : g \in H \rangle \underset{=}{\supseteq} H \quad \Rightarrow H$ einfach.

b) Löwenheim-Skolem. $\exists H \prec G$ mit $|H| = \aleph_0$.

$S \subset G \qquad \max\{|S|, |L|\} \leq \aleph_0 \leq |G| \quad \overset{a)}{\Longrightarrow} H$ einfach.

$S = \emptyset. \qquad$ $|L| = 3$

Aufgabe 3

$\supset = \varphi.$

3

Aufgabe 3

Sei K ein Körper und $\kappa > |K|$ eine unendliche Kardinalzahl.

(a) Formulieren Sie die Theorie der unendlichen K-Vektorräume.

(b) Zeigen Sie, dass die Theorie der unendlichen K-Vektorräume κ-kategorisch ist.

(c) Angenommen $|K| = \infty$, ist die Theorie der unendlichen K-Vektorräume auch $|K|$-kategorisch?

a) $L = \{ \underline{0}, +, (s_k)_{k \in K} \}$

$$T = \left\{ \begin{array}{lll} \forall x\, y\, z & x + (y+z) \doteq (x+y) + z & \\ \forall x\, y & x+y \doteq y+x & \\ \forall x & x + \underline{0} \doteq x \ \wedge\ \underline{0} + x \doteq x & \\ \forall x\, \exists y & x + y \doteq \underline{0} & \\ \forall x & s_1(x) \doteq x & \\ \forall x & s_a(s_b(x)) \doteq s_{a \cdot b}(x), & \text{für } a,b \in K \\ \forall x\, y & s_a(x+y) \doteq s_a(x) + s_a(y), & \text{für } a \in K \\ \forall x & s_{a+b}(x) \doteq s_a(x) + s_b(x), & \text{für } a,b \in K \end{array} \right\}$$

unendlich-dim.

$\left(\forall x_1 \ldots x_n : \exists y : \neg \sum_{i=1}^{n} s_{a_i}(x_i) \doteq y, \text{ für alle } a_1 \ldots a_n \in K \text{ und } n \in \mathbb{N} \right)$

$\exists x_1 \ldots x_n : \bigwedge_{i \neq j} \neg x_i \doteq x_j$, für $n \in \mathbb{N}$. $\}$ unendlich.

(b) Zeigen Sie, dass die Theorie der unendlichen K-Vektorräume κ-kategorisch ist.

(c) Angenommen $|K| = \infty$, ist die Theorie der unendlichen K-Vektorräume auch $|K|$-kategorisch?

b) $\kappa > |K|$

Vaught's test.

1) T ist konsistent: Falls $|K| = \infty \Rightarrow K \models T$

$K[x] \models T$

2) T hat kein endliches Modell.

3) $|L| \leq \kappa$ $\quad \kappa > |K| = (|L| + 2)$ und κ ist unendlich.

$\quad \shortparallel$

$|K|$

Beh: $V, V' \models T$ mit $|V| = |V'| = \kappa$, dann $V \xrightarrow{\sim} V'$

Bew: $\mathcal{A} \models T$, Sei B eine Basis von $\mathcal{A}$. (Zorn's Lema)

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{b \in B} K$$

$$b \longrightarrow \delta_b = \begin{cases} 1 & \text{bei } b \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$|V| = \dim(V) \cdot |K|,$$

$$\kappa = |\mathcal{A}| = |B| \cdot |K| \qquad \boxed{|K| < \kappa}$$

$$\Longrightarrow |B| = \kappa \quad \Longrightarrow \quad \Big|\bigoplus_{b \in B} K\Big| = |B| \cdot |K| = \kappa.$$

$V, V' \models T$, B_V, $B_{V'}$ Basen $\quad |B_V| = |B_{V'}| = \kappa$.

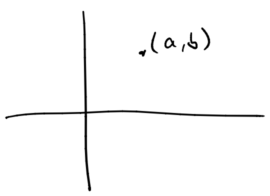
$$\Longrightarrow \begin{array}{ccc} \bigoplus_{b \in B_V} K & \cong & \bigoplus_{b \in B_{V'}} K \\ \wr\| & & \|\wr \\ V & & V' \end{array} \quad \Longrightarrow \quad V \cong V'.$$

$\square$

Beh: T ist nicht $|K|$-kategorisch.

$K = \mathbb{R}$, $\quad V = \mathbb{R}$, $\quad V' = \mathbb{R}^2$, nicht isomorph.

$$|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2|$$



$$\mathbb{R}^2 \cong (0,1)^2 \longrightarrow (0,1) \cong \mathbb{R}$$

$$a = 0.a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$$

$$b = 0.b_1 b_2 \ldots \longrightarrow 0.a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \ldots$$

Aufgabe 4:

der Zufallsgraphen, wobei

$$\psi_{m,n} = \forall x_0, \ldots, x_{m-1}, y_0, \ldots, y_{n-1} \bigwedge_{\substack{j<m \\ i<n}} \neg x_i \doteq y_i \rightarrow$$
$$\exists z \bigwedge_{\substack{j<m \\ i<n}} \neg z \doteq x_i \wedge \neg z \doteq y_j \wedge E(z, x_i) \wedge \neg E(z, y_i).$$

Zeigen Sie, dass T_{RG} $\aleph_0$-kategorisch ist.
Hinweis: Verwenden Sie die Back-and-Forth Methode.

Vaughts' test:

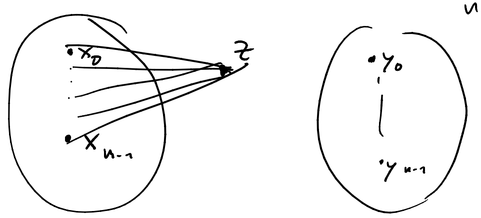
1) T_{RG} ist konsistent. $\qquad \mathbb{N}$ und $E^{\mathbb{N}}(n,m)$ mit Wahrscheinlichkeit 50%.

Vaughts test.

1) T_{RG} ist konsistent.

$\mathbb{N}$ und $E^{\mathbb{N}}(n, m)$ mit Wahrscheinlichkeit 50%.
$E^{\mathbb{N}}(m, n)$
$n \neq m$

Gilt $\psi_{m,n}$?



Sei $z \in \mathbb{N} \setminus \{x_i, y_j\}$

$$\mathbb{P}(\psi_{m,n} \text{ gilt für } z) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+m} > 0, \quad \Rightarrow \exists \text{ so ein } z \in \mathbb{N}.$$

2) T_{RG} hat kein endliches Modell.

3) $|L| < \kappa = \aleph_0$ ✓

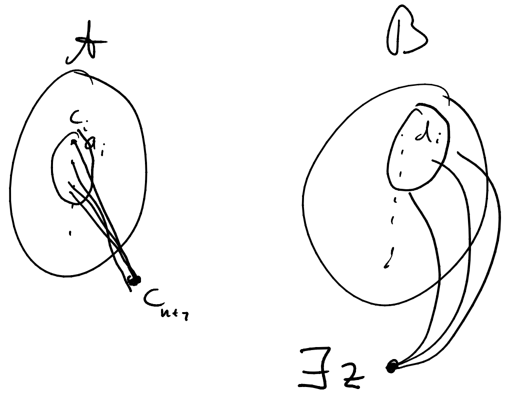
Beh: $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T_{RG}$, $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| = \aleph_0$. Dann $\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$.

Bew: $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots\}$, $\mathcal{B} = \{b_1 \dots b_2, \dots\}$.

Möchten $\mathcal{A} = \{c_1, \dots\}$, $\mathcal{B} = \{d_1 \dots\}$ so dass $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Isom.
$c_i \mapsto d_i$

Induktion $C_n = \{c_1 \dots c_n\} \xrightarrow{\sim} D_n = \{d_1 \dots d_n\}$
$c_i \longmapsto d_i$.

Falls $n+1$ gerade ist: nehmen wir $i_{n+1} := \min\{i : a_i \in \mathcal{A} \setminus C_n\}$
$c_{n+1} := a_{i_{n+1}}$



$$\{x_0, \dots x_{m-1}\} = \{b_i \in D_n : R^{\mathcal{A}}(a_i, c_{n+1})\}$$
$$\{y_0, \dots y_{m'-1}\} = \{b_i \in D_n : \neg R^{\mathcal{A}}(a_i, c_{n+1})\}$$

$\mathcal{B} \models \psi_{m,m'} \Rightarrow \exists z: \quad R^{\mathcal{B}}(x_i, z)$
$\neg R^{\mathcal{B}}(y, z)$, $\quad d_{n+1} := z$.

$$C_{n+1} \xrightarrow{\sim} D_{n+1} := D_n \cup \{d_{n+1}\}$$
$$c_i \longmapsto d_i$$

Falls $n+1$ ungerade ist, vertauschen wir $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$$
$$c_i \longmapsto d_i \quad .$$

$\square$

$\Rightarrow T_{RG}$ ist vollständig.

Aufgabe 5

Zeigen Sie: Jede Formel ist äquivalent zu einer Formel in *Pränex-Normalform*:

$$Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \varphi$$

wobei Q_i jeweils einer der Quantoren $\forall$ oder $\exists$ ist und φ eine Formel ohne Quantoren ist.

Induktion über Komplexität.

1) $\psi = t_1 \doteq t_2$ ✓

2) $\psi = R t_1 \ldots t_n$ ✓

3) $\psi = \neg \vartheta$, $\quad \neg \vartheta \sim \neg Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \varphi$

$\sim \overline{Q}_1 x_1 \ldots \overline{Q}_n x_n \neg \varphi$ ✓ $\qquad \overline{\forall} = \exists, \ \overline{\exists} = \forall.$

4) $\psi = \vartheta_1 \wedge \vartheta_2$

5) $\psi = \exists x \, \vartheta$, $\quad \vartheta \sim Q_1 x_1 \ldots \varphi$

$\psi \sim \exists x \, Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \varphi .$

$\square$

Trennungssätze: $\quad \varphi$ <u>trennt</u> T_1 von T_2

$$T_1 \vdash \varphi \quad \wedge \quad T_2 \vdash \neg \varphi$$

$\neg \varphi$ <u>trennt</u> T_2 von T_1 ,