Übungsstunde 5

Thursday, 28 April 2022 12:13

Aufgabe 1

Geben Sie zwei Theorien T_1 und T_2 in einer Sprache L an, so dass T_1 und T_2 beide unendliche Modelle haben und die folgenden beiden Bedingungen gelten:

(a) Es gibt eine universelle Aussage, die T_1 von T_2 trennt.

(b) Es gibt keine universelle Aussage, die T_2 von T_1 trennt.

Hinweis: Zum Beispiel kann L_{Group} verwendet werden.

φ trennt T_1 von T_2 wenn: $T_1 \vdash \varphi$ und. $T_2 \vdash \neg\varphi$

$\neg\varphi$ trennt T_2 von T_1

$L_{Group} = \{ \underline{0}, +, - \}$, $T_1 = T_{AbGruppen} \cup \{\varphi\}$, $\varphi = \forall x : x + x \doteq \underline{0}$.

$T_2 = T_{AbGruppen} \cup \{\neg\varphi\}$.

universelle Aussage.

$\forall x_1 \dots \forall x_n \; \rho$ keine Quantoren.

$\mathbb{Z}, \models T_2$, $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \models T_1$

$T_1 \vdash \varphi$, $T_2 \vdash \neg\varphi$

Beh: (b)

Bew: Annahme $\exists \psi$ universelle Aussage die T_2 von T_1 trennt.

$T_2 \vdash \psi$, $T_1 \vdash \neg\psi$.

$\mathbb{Z} \models T_2 \vdash \psi$

$\vee$

$\{0\} \models \psi$

$\{0\} \models T_1 \vdash \neg\psi$ $\lightning$.

Aufgabe 2

Sei T eine L-Theorie. Analog zum Satz 3.11 über universelle Aussagen gibt es den folgenden Satz über existentielle Aussagen:

Satz: Seien T_1 und T_2 zwei Theorien. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) Es gibt eine existentielle Aussage, die T_1 von T_2 trennt.

(b) Kein Modell von T_2 ist eine Überstruktur eines Modells von T_1.

Verwenden Sie den obigen Satz, um analog zu Korollar 3.13 die folgenden Aussagen zu zeigen:

(1) Für eine Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ sind äquivalent:

  (a) φ ist modulo T äquivalent zu einer existentiellen Formel.

  (b) Für alle Modelle $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ von T und $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$ gilt: Falls $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$, dann gilt auch $\mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$.

(2) Eine Theorie T ist äquivalent zu einer existentiellen Theorie genau dann wenn für alle Strukturen $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ gilt $\mathfrak{A} \models T \implies \mathfrak{B} \models T$.

(1) (a) $\Rightarrow$ (b). ψ $\exists$-Formel. $T \vdash \forall x_1 \dots x_n : (\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$

$\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$, $\mathcal{A} < \mathcal{B}$. $a_1 \dots a_n \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \underbrace{\varphi(a_1 \dots a_n)}_{L(A)\text{-Aussage}}$.

$\mathcal{A} \models \psi(a_1 \dots a_n) \xRightarrow{\text{Lem 3.5}} \mathcal{B} \models \psi(a_1 \dots a_n) \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi(a_1, \dots a_n)$

$\mathcal{A} \models \psi(a_1 \dots a_n) \overset{\text{Lem 3.5}}{\Rightarrow} \mathcal{B} \models \psi(a_1 \dots a_n) \underset{\mathcal{B} \models T}{\Rightarrow} \mathcal{B} \models \varphi(a_1 \dots a_n)$. $L(A)$-Aussage.

(b) $\Rightarrow$ (a)

$L' = L \cup \{c_1, \dots, c_n\}$ c_i Konstanten.

$T_1 = T \cup \{\varphi(\bar{c})\}$ L'-Aussage, $T_2 = T \cup \{\neg\varphi(\bar{c})\}$

$\mathcal{A} \models T$, $(\mathcal{A}, a_1 \dots a_n) \models T_1$

$\underline{\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}} \Rightarrow (\mathcal{B}, a_1 \dots a_n) \models \varphi(\bar{c}) \Rightarrow (\mathcal{B}, a_1 \dots a_n) \not\models T_2$.

Satz (b). $\Rightarrow$ Satz (a) $\exists \psi$ $\exists$-L'-Aussage : $T_1 \vdash \psi$, $T_2 \vdash \neg\psi$.

ψ ist eine L'-Aussage $\rightsquigarrow$ ψ' eine L-Formel

$c_1 \dots c_n$ ersetzen durch $x_1 \dots x_n$.

$\mathcal{A} \models T \Leftrightarrow \forall a_1 \dots a_n \in \mathcal{A}: (\mathcal{A}, a_1 \dots a_n) \models T_1 = T \cup \varphi(\bar{c})$

$\Rightarrow \forall \mathcal{A} \models T : \forall a_1 \dots a_n \in \mathcal{A} : T \models (\varphi(\bar{a}) \to \psi(\bar{a}))$

$\forall \mathcal{A} \models T$ $T \models \forall \bar{x} : \varphi(x) \to \psi(x)$.

$T_2 \vdash \neg\psi(\bar{c}) \overset{\forall a..}{\Rightarrow} T \vdash (\neg\varphi(\bar{a}) \to \neg\psi(\bar{a}))$ L'-Aussagen.

$T \vdash \forall x_1 \dots x_n : (\psi(\bar{x}) \to \varphi(\bar{x}))$ $\varphi \equiv \psi$ mod T.

(2) „$\Rightarrow$" T_1 und T_2 sind äquivalent: $T_1 \vdash T_2 \wedge T_2 \vdash T_1$.

T äquv. $T_\exists$ $\leftarrow$ existentielle Theorie. $T \vdash T_\exists \vdash \psi$

$\mathcal{A} \models T$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. $\forall \psi \in T_\exists : \mathcal{A} \models \psi$,

ψ existentiell $\overset{\mathcal{A} \subset \mathcal{B}}{\underset{\text{Lem 3.5}}{\Longrightarrow}}$ $\mathcal{B} \models \psi$,

$\Rightarrow \mathcal{B} \models T_\exists \vdash T \Rightarrow \mathcal{B} \models T$.

„$\Rightarrow$" Sei $\mathcal{A} \models T \overset{\text{Annahme}}{\Longrightarrow}$ Wenn $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. $\mathcal{B} \models T$.

Sei $\varphi \in T$

Es ist unmöglich, dass $\mathcal{B} \models \neg\varphi \wedge \mathcal{A} \models T$.

$T_1 := T$, $T_2 = \{\neg\varphi\}$.

Kein Modell von T_2 ist Überstruktur eines Modells von T_1 (Satz (b).)

$\Rightarrow$ Satz (a) $\Rightarrow$ $\exists \psi$ existentielle Formel : ψ_φ : $T = T_1 \models \psi_\varphi$, $T_2 = \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi_\varphi$.

$\Leftrightarrow \psi_\varphi \vdash \varphi$

$T_\exists = \{\psi_\varphi : \varphi \in T\}$,

$T_\exists = \{ \psi_\varphi \ : \ \varphi \in T \}$, $\Leftrightarrow \psi_\varphi \vdash \varphi$

$(\mathcal{A} \models T \vdash \psi_\varphi \Rightarrow \mathcal{A} \models T_\exists) \Longrightarrow T \vdash T_\exists$

$(\mathcal{A} \models T_\exists \vdash \psi_\varphi \vdash \varphi \Rightarrow \mathcal{A} \models T) \Rightarrow T_\exists \vdash T.$

Aufgabe 3

Sei T eine L-Theorie. Sei $L^m = L \cup \{R_\varphi\}$ eine neue Sprache, wobei R_φ ein n-stelliges Relationssymbol für jede L-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ist. Die *Morleyisierung* T^m ist die L^m-Theorie

$$T^m = T \cup \{\forall x_1, \ldots, x_n (R_\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)) \colon \varphi \text{ ist eine } L\text{-Formel}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass T^m Quantorenelimination hat.

(b) Zeigen Sie: T ist eine vollständige L-Theorie genau dann wenn T^m eine vollständige L^m-Theorie ist.

Primitive Existenzformel: $\varphi = \exists y \, \rho(y)$, $\rho = \bigwedge$ Basisformeln

$= \bigwedge (\neg)$ atomare

$t_1 \doteq t_2$

oder $R t_1 \ldots t_n$

Sei φ eine L^m-Aussage,

Immer wenn $R_\varphi t_1 \ldots t_n$ vorkommt in φ, dann ersetze durch $\overline{\varphi}(t_1 \ldots t_n)$

$\Longrightarrow$ Sei ψ_φ die so erhaltene Formel, L-Aussage.

$T^m \vdash \forall x_1 \ldots x_n \ \varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi_\varphi(\bar{x}) \longleftrightarrow R_{\psi_\varphi}(\bar{x})$

quantorenfrei. $\Rightarrow T^m$ hat Quantorenelimierung.

(b) Sei T vollständig als L-Theorie.

Sei φ eine L^m-Aussage.

Relationen durch Formeln ersetzen (wie oben)

Es gibt eine L-Aussage ψ äquivalent zu φ. (mod T^m).

$T \vdash \psi$ oder $T \vdash \neg\psi$. (Vollständigkeit)

$\underset{T \subset T^m}{T^m \vdash T} \vdash \psi \Rightarrow \underline{T^m \vdash \psi}$, oder $\underline{T}^m \vdash T \vdash \underline{\neg\psi}$.

$T \vdash T \vdash \psi \Rightarrow \underline{T \vdash \psi}$, oder $\underline{T} \vdash T \vdash \neg\underline{\psi}$.

$T \subset T^m$

äquivalent $T^m \vdash \varphi$ oder $T^m \vdash \neg\varphi$.

$\Rightarrow T^m$ vollständig.

Sei T^m vollständig. $L \subset L^m$

Sei φ eine L-~~Formel~~ Aussage. also ein L^m-~~Formel~~ Aussage.

$T^m \vdash \varphi$ oder $T^m \vdash \neg\varphi$ (Vollständigkeit)

Beh: $T \vdash \varphi$ oder $T \vdash \neg\varphi$

Bew: Für jedes Modell $\mathcal{A} \models T$ gibt es ein Modell

$$(\mathcal{A}, R_\psi^{\mathcal{A}}) \models T^m$$

ψ – L-Formel

$$R_\psi^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) :\Longleftrightarrow \mathcal{A} \models \psi(a_1 \dots a_n)$$

$$R_\psi^{\mathcal{A}} = \{ a_1 \dots a_n \in \mathcal{A}^n : \mathcal{A} \models \psi(a_1 \dots a_n) \}$$

Falls $T^m \vdash \varphi$ φ enthält gar keine R_ψ,

$(\mathcal{A}, R_\psi^{\mathcal{A}}) \models \varphi \Rightarrow \underline{\mathcal{A} \models \varphi}$.

$\Rightarrow T \vdash \varphi$,

Falls $T^m \vdash \neg\varphi \Rightarrow \dots T \vdash \neg\varphi$. $\square$

T ist vollständig.

Aufgabe 4

Schreiben Sie die folgenden Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ als äquivalente Formeln (modulo T) ohne Quantoren.

(a) Sei T die Theorie der $\mathbb{R}$-Vektorräume und $\varphi(x_1) = \forall v\colon x_1 + v \doteq v$

(b) Sei T die Theorie der Gruppen und $\varphi(x_1) = \exists x_2\colon x_1 \cdot x_2 \doteq \underline{e}$.

(c) Sei $L = L_{\mathrm{ORing}}$, $T = T_{\mathrm{OField}} \cup \{\forall x\colon (x > \underline{0} \to \exists y\colon y \cdot y \doteq x)\}$ die Theorie der geordneten Körper mit Wurzeln und sei

$$\varphi(a, b, c) = \exists x\colon ax^2 + bx + c \doteq \underline{0}.$$

(a) $\psi(x_1) = x_1 \doteq \underline{0}$

(b) $\varphi = \top$, $\varphi = \underline{e} \doteq \underline{e}$, $\varphi(x_1) = x_1 \doteq x_1$

(c) $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$$\varphi(a,b,c) = \big((a \doteq 0) \wedge (\neg b \doteq 0 \vee c \doteq \underline{0})\big) \vee b \cdot b - \underbrace{4 \cdot a \cdot c}_{a\cdot c + a\cdot c + a\cdot c + a\cdot c} > \underline{0}$$

$$\vee\ b \cdot b - 4 \cdot a \cdot c \doteq \underline{0}$$

Fun: The natural numbers game.
Lean theorem prover tutorial.