Übungsstunde 6

Thursday, 12 May 2022 12:10

Aufgabe 1

Sei K ein Körper und $L_{V(K)}$ die Sprache der K-Vektorräume. Zeigen Sie, dass die $L_{V(K)}$-Theorie der unendlichen Vektorräume Quantorenelimination hat und vollständig ist.

$|V| = \infty$.

Theorem: T hat Quantorenelimination $\iff$

$\forall V_1, V_2 \models T$ Unterstruktur $\mathcal{A} \subset V_1, V_2$, $a_1, \dots a_n \in \mathcal{A}$

$\forall \varphi(\bar{x})$ primitiven Existenz Formeln $\quad (\varphi(\bar{x}) = \exists y\, \rho(\bar{x}, y))$

$$V_1 \models \varphi(\bar{a}) \implies V_2 \models \varphi(\bar{a})$$

$L = \{\underline{0}, +, (r_k)_{k \in K}\}$, Sprache der K-Vektorräume.

$K \times V \longrightarrow V$ ← nicht von der Form $V^n \longrightarrow V$, wie Funktionen in Sprachen aussehen.

T = Theorie der unendliche Vektorräume

Sei V_1, V_2, $\mathcal{A} \subset V_1, V_2$ ($\mathcal{A}$ ist ein Vektorraum), $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$.

$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \mathcal{A}$.

$\varphi(\bar{x}) = \exists y\, \rho(\bar{x}, y)$

$V_1 \models \varphi(\bar{a}) \Rightarrow \exists y_1 \in V_1 : V_1 \models \rho(\bar{a}, y_1)$.

Falls $y_1 \in \mathcal{A}$, $y_1 \in V_2 \Rightarrow V_2 \models \varphi(\bar{a})$

Falls $y_1 \notin \mathcal{A}$,

Falls V_2 unendlich-dimensional. $\mathcal{A}$ ist endlich dim.

Fall 1: $V_2 \neq \mathcal{A}$

Sei $y_2 \in V_2 \setminus \mathcal{A}$ beliebig.

$$\mathcal{A} + y_1 \cdot K \xrightarrow{\sim} \mathcal{A} + y_2 \cdot K$$

Lemma: $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ L-Strukturen $a \in \mathcal{A}_1$ Falls $f: \mathcal{A}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_2$

Dann gilt für jede L-Formel $\psi(x)$ $\quad \mathcal{A}_1 \models \psi(a) \iff \mathcal{A}_2 \models \psi(f(a))$

Bew: $\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_2$.

$L' = L \cup \{c\}$ $\quad c$ Konstante.

$\mathcal{A}_1' := (\mathcal{A}_1, a)$, $\mathcal{A}_2' = (\mathcal{A}_2, f(a))$. $\quad f: \mathcal{A}_1' \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_2'$ isom.

$\implies \mathcal{A}_1' \equiv \mathcal{A}_2'$

$\mathcal{A}_1 \models \psi(a) \iff \mathcal{A}_1' \models \psi(c) \overset{\mathcal{A}_1' \equiv \mathcal{A}_2'}{\iff} \mathcal{A}_2' \models \psi(c) \iff$ [illegible]

$$\Rightarrow \quad \mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_2$$

$$\mathcal{A}_1 \models \psi(a) \iff \mathcal{A}_1' \models \psi(c) \overset{\mathcal{A}_1' \equiv \mathcal{A}_2'}{\iff} \mathcal{A}_2' \models \psi(c). \iff \mathcal{A}_2 \models \psi(f(a))$$

L-Formel mit Belegung a. ↑ L'-Formel. ↑

$\square$

$$V_1 \models \varphi(\bar{a}) \iff V_1 \models \rho(\bar{a}, y_1) \qquad V_2 \models \rho(\bar{a}, f(y_1)) \iff V_2 \models \varphi(\bar{a})$$

$L(\bar{a})$-Formel mit Belegung y_1

ρ hat keine Quant.

$$\mathcal{A} + y_1 K \models \rho(\bar{a}, y_1) \overset{\text{Lemma}}{\iff} \mathcal{A} + y_2 K \models \rho(\bar{a}, f(y_1))$$

<u>Fall 2:</u> $y_1 \notin \mathcal{A}$, $V_2 = \mathcal{A}$. , Löwenheim-Skolem. (V_2 ist unendlich.)

$$\Rightarrow \exists \kappa > \max\{|V_2|, |L|\} : \exists \mathcal{A}_\kappa \text{ L-Struktur} : \mathcal{A}_\kappa \equiv V_2 .$$

$$\mathcal{A} = V_2 \subset \mathcal{A}_\kappa ,$$

$$V_1 \models \varphi(\bar{a}) \overset{\text{Fall 1}}{\Longrightarrow} \mathcal{A}_\kappa \models \varphi(\bar{a}) \overset{\mathcal{A}_\kappa \equiv V_2}{\iff} V_2 \models \varphi(\bar{a})$$

$\square$

<u>Beh:</u> T ist vollständig.

<u>Bew:</u>
- T ist konsistent , $\bigoplus_{i=1}^{\infty} K$ ist ein unendlicher Vektorraum.
- T hat Quantorenelimination ✓
- T hat eine Primstruktur. $\{0\}$

Aufgabe 2

Sei $L = \{E\}$ die Sprache der Graphen. Zeigen Sie, dass die L-Theorie des Zufallsgraphen T_{RG} (siehe Serie 3, Aufgabe 4) Quantorenelimination hat und vollständig ist.

$$\psi_{m,n} = \forall x_0, \ldots, x_{m-1}, y_0, \ldots, y_{n-1} \bigwedge_{\substack{j<m \\ i<n}} \neg x_i \doteq y_i \to$$
$$\exists z \bigwedge_{\substack{j<m \\ i<n}} \neg z \doteq x_i \wedge \neg z \doteq y_j \wedge E(z, x_i) \wedge \neg E(z, y_i).$$

$L = \{E\}$

Sei $G_1, G_2 \models T_{RG}$, $\mathcal{A} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \subset G_1, G_2$, $\varphi(\bar{x}) = \exists y\, \rho(\bar{x}, y)$.

$$\rho(\bar{x}, y) = \bigwedge (\neg) \text{ atomar } = \bigwedge (\neg)\, E\, t_1, t_2$$

$G_1 \models \varphi(\bar{a}) \Rightarrow \exists y_1 \in G_1 : G_1 \models \rho(\bar{a}, y_1)$.

Falls $y_1 \in \mathfrak{A} \Rightarrow y_1 \in G_2 \Rightarrow G_2 \models \varphi(\bar{a})$

Falls: $y_1 \notin \mathfrak{A}$. Sei $y_2 \in G_2$ so dass $E^{G_1}(a_i, y_1) \Leftrightarrow E^{G_2}(a_i, y_2)$

$\uparrow$ unendlich. $(\psi_{n,m})$ $\qquad \psi_{n,m}$

$(\bar{a}, y_1)$

$G_1 \models \rho(\bar{a}, y_1) \Leftrightarrow G_1 \models \bigwedge (\neg) E\, t_1, t_2 \Leftrightarrow G_2 \models \bigwedge (\neg) E\, t_1\, t_2 \Leftrightarrow G_2 \models \rho(\bar{a}, y_2)$.

$\Downarrow$

$G_1 \models \varphi(\bar{a}) \qquad G_2 \models \varphi(\bar{a})$ $\square$

Behauptung: T_{RG} ist vollständig.

Bew: • T_{RG} ist konsistent Kanten mit Wahrsch. $\frac{1}{2}$ in einen unendlichen Graphen.

• T_{RG} hat Quantorenelimination ✓

• T_{RG} hat ein Primmodell. $\emptyset$ leere Graphen. oder. 1 Kasten. $\square$

Aufgabe 3

Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur und B eine Teilmenge des Universums von $\mathfrak{A}$. Eine Menge von $L(B)$-Aussagen $\Sigma(x)$ mit einer freien Variable x ist *endlich erfüllbar*, wenn es für jede endliche Teilmenge $\Delta(x) \subset \Sigma(x)$ ein $a \in \mathfrak{A}$ gibt mit $\mathfrak{A} \models \delta(a)$ für alle $\delta(x) \in \Delta(x)$. Die Menge $\Sigma(x)$ ist ein *partieller Typ über B* wenn sie endlich erfüllbar ist und $\Sigma(x)$ ist ein *Typ über B*, wenn sie maximal endlich erfüllbar ist.

(1) Sei $a \in \mathfrak{A}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{tp}(a/B) := \{\varphi(x) \colon \mathfrak{A} \models \varphi(a), \varphi \text{ ist eine } L(B)\text{-Formel }\}$$

ein Typ ist.

Hinweis: Für jedes $a \in \mathfrak{A}$ und jede Formel $\varphi(x)$ mit einer freien Variablen gilt $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$ oder $\mathfrak{A} \models \neg\varphi(a)$.

1) $tp(a/B)$ ist endlich erfüllbar. Da a erfüllt

2) Maximalität

Beh: Für jede $L(B)$-Formel $\psi(x)$ gilt:

$\Big(\underline{\forall \Delta \subset tp(a/B) \text{ endlich} : \exists a \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \Delta(a) \wedge \mathfrak{A} \models \psi(a)} \Big) \longrightarrow \psi \in tp(a/B)$.

Bew: Sei $\psi \notin tp(a/B) \Rightarrow$ Nicht: $\mathfrak{A} \models \psi(a) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \neg\psi(a)$

$\Rightarrow \neg\psi \in tp(a/B)$.

Sei $\Delta = \{\neg\psi\} \subset tp(a/B)$: $\forall a \in \mathfrak{A}$ gilt nicht: $\big(\mathfrak{A} \models \neg\psi(a) \wedge \mathfrak{A} \models \psi(a)\big)$

$\uparrow \qquad \nearrow$ $\square$

(2) Sei $L = \{<\}$. Wir betrachten $\mathbb{N}$ als L-Struktur und wählen $B = \mathbb{N}$. Sei

$$\Sigma(x) = \{\underbrace{x > n}: n \in \mathbb{N}\}.$$

(i) Ist $\Sigma(x)$ endlich erfüllbar?
(ii) Ist $\Sigma(x)$ ein Typ über B?
(iii) Zeigen Sie, dass $\Sigma(x)$ nicht realisierbar über $\mathbb{N}$ ist.
(iv) Finden Sie eine L-Struktur $\mathfrak{A}$, so dass $\Sigma(x)$ realisierbar über $\mathfrak{A}$ ist.
(v) Finden Sie eine L-Struktur $\mathfrak{A}$, die eine elementare Erweiterung von $\mathbb{N}$ ist, so dass $\Sigma(x)$ realisierbar über $\mathfrak{A}$ ist.

(i) JA.

(ii) NEIN. $x \doteq x \notin \Sigma(x)$.

(iii) Es kein $n \in \mathbb{N}$: $n > m \quad \forall m \in \mathbb{N}$

(iv) Finden Sie eine L-Struktur $\mathfrak{A}$, so dass $\Sigma(x)$ realisierbar über $\mathfrak{A}$ ist.

(v) Finden Sie eine L-Struktur $\mathfrak{A}$, die eine elementare Erweiterung von $\mathbb{N}$ ist, so dass $\Sigma(x)$ realisierbar über $\mathfrak{A}$ ist.

(ii) $\mathbb{N} \models \mathbb{N}$. $\quad x \doteq x \notin \Sigma(x)$.

(iii) Es kein $n \in \mathbb{N}$: $\quad n > m \quad \forall m \in \mathbb{N}$.

(iv) $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\quad n < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $\quad \Sigma(x)$ ist von ∞ realisiert.

(v) ↑ nicht eine elementare Erweiterung. $\qquad \varphi = \forall x \, \exists y : y > x$.

$\mathbb{N} \models \varphi$, $\quad \mathbb{N} \cup \{\infty\} \models \neg\varphi$.

Löwenheim Skolem. ($\mathbb{N}$ ist unendlich)

$\Rightarrow \exists \kappa > \max\{|\mathbb{N}|, |L|\}$, $\exists \mathfrak{A}_\kappa \equiv \mathbb{N}$. mir $|\mathfrak{A}_\kappa| = \kappa$.

$\mathbb{N} \models \forall x : \quad x \doteq 0 \ \vee \ x \doteq 1 \ \vee \ x \doteq 2 \ \vee \dots \vee \ x \doteq n \ \vee \ x > n \quad =: \varphi_n$

$\Rightarrow \mathfrak{A}_\kappa \models \varphi_n$

Sei $x_0 \in \mathfrak{A}_\kappa \setminus \mathbb{N}$ beliebig. $\Rightarrow x_0 > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \mathfrak{A}_\kappa \models x_0 > 0$

$\mathfrak{A}_\kappa \models \Sigma(x_0)$

Bem: $\quad tp^{\mathfrak{A}_\kappa}(x_0) = \{ \underline{\varphi(x)} : \mathfrak{A}_\kappa \models \varphi(x_0), \}$ ist ein Typ von $\mathbb{N}$.

$\Updownarrow$

$\mathbb{N} \models \varphi(x_0)$

Dieser Typ ist nicht realisiert in $\mathbb{N}$, aber realisiert in $\mathfrak{A}_\kappa$.

Prop: $\forall \mathfrak{A}$, $\forall$ Typ $p(x)$ $\exists$ elementare Erweiterung $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}_\kappa$: $\quad p(x)$ realisiert in $\mathfrak{A}_\kappa$.

(3) Sei $a \in \mathfrak{A}$ und $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{tp}(a) = \mathrm{tp}(f(a))$.

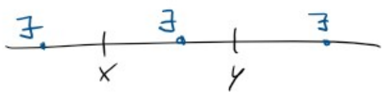
$f : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}$.

Zu zeigen: $\quad \forall \psi(x) \quad L$-Formel: $\qquad \mathfrak{A} \models \psi(a) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi(f(a))$.

Bew: Lemma in (A1).

(4) Finden Sie ein Modell $\mathfrak{A}$ von T_{DLO}, der Theorie der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte, welches zwei Elemente $a, b \in \mathfrak{A}$ enthält, so dass $\mathrm{tp}(a) = \mathrm{tp}(b)$, aber es kein $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ gibt mit $f(a) = b$.

Hinweis: In Vorlesung 5 wurde gezeigt, dass T_{DLO} vollständig ist. Versuchen Sie es mit einer disjunkten Vereinigung von Mengen mit unterschiedlicher Kardinalität, zum Beispiel $\mathbb{R} \cup \mathbb{Q}$.



$\mathfrak{A} = \underset{\substack{\cup \\ r}}{\mathbb{R}} \ \dot\cup \ \underset{\substack{\cup \\ q}}{\mathbb{Q}}$

Definieren $\quad r > q \quad \forall r \in \mathbb{R}, \ q \in \mathbb{Q}$

Beh 1: $\quad tp(0_\mathbb{R}) = tp(0_\mathbb{Q})$

Beh 1: $tp(0_{\mathbb{R}}) = tp(0_{\mathbb{Q}})$

Bew: Bemerken: $\mathbb{Q} \models T_{DLO}$. $\quad \forall a,b \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists f: \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$ Isom. $\quad a \mapsto b$.

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} tp^{\mathbb{Q}}(a) = tp^{\mathbb{Q}}(b)$$

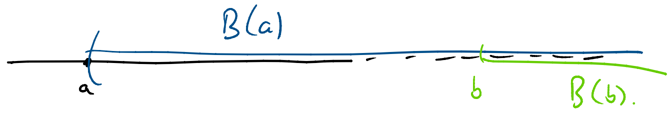
$\psi(x)$ ist eine L-Formel. $\quad \mathbb{Q} \models \exists a : \psi(a) \longrightarrow \forall b : \psi(b)$

$$\overset{T_{DLO}\text{ vollst.}}{\Longrightarrow} \mathcal{A} \models \exists a : \psi(a) \longrightarrow \forall b\ \psi(b).$$

Sei $\psi(x) \in tp(0_{\mathbb{R}}) \Rightarrow \mathcal{A} \models \psi(0_{\mathbb{R}}) \Longrightarrow \mathcal{A} \models \psi(0_{\mathbb{Q}}). \Rightarrow \psi(x) \in tp(0_{\mathbb{Q}})$.

$$tp(0_{\mathbb{R}}) \subset tp(0_{\mathbb{Q}}) \underset{f^{-1}\text{ ist Isom.}}{\Longrightarrow} tp(0_{\mathbb{R}}) = tp(0_{\mathbb{Q}})$$

Beh 2: $\exists$ Kein Isom. $\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$, $\quad 0_{\mathbb{R}} \mapsto 0_{\mathbb{Q}}$.



Bew: Def: $B(a) = \{x \in \mathcal{A} : x > a\}$.

Falls $f: \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$, $0_{\mathbb{R}} \mapsto 0_{\mathbb{Q}}$

$$\Rightarrow \underbrace{f(\underbrace{B(0_{\mathbb{R}})}_{\text{überabzählbar}})}_{\text{überabzählbar}} = B(f(0_{\mathbb{R}})) = B(0_{\mathbb{Q}}) \leftarrow \text{abzählbar.}$$

$\lightning$ $\quad \square$

(5) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, 0, +)$ als L_{Groups}-Struktur genau zwei verschiedene Typen hat, die über $\mathbb{R}$ realisierbar sind.

$tp(a) \quad a \in \mathbb{R}$.

Beh 1: $tp(0) \neq tp(1)$

Bew: $x \doteq 0 \in tp(0) \setminus tp(1)$. $\square$

Beh 2: $\forall a \neq 0: \quad tp(a) = tp(1)$.

Bew: $f_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{a}$ $\qquad f(a) = 1$.

$$\overset{(3)}{\Longrightarrow} tp(a) = tp(f(a)) = tp(1). \quad \square$$

---

1) $S_n^{\mathcal{A}}(B) = \{$ n-Typen über $B \}$

2) $S_n(T) = \{$ n-Typen von $T \}$.

$p(x)$ maximal konsistent mit T.

$p(x)$ " maximal konsistent mit T.

$$\exists \mathcal{A} \models T : \exists \bar{a} \in \mathcal{A}^n : \mathcal{A} \models p(\bar{a})$$

Kompaktheitssatz: $S_n^{\mathcal{A}}(\emptyset) = S_n(Th(\mathcal{A}))$

$$\underset{\uparrow \text{Theorie}}{S_n(\emptyset)} = \bigcup_{\mathcal{A}} S_n^{\mathcal{A}}(\emptyset)$$