Übungsstunde 7

Thursday, 2 June 2022 12:13

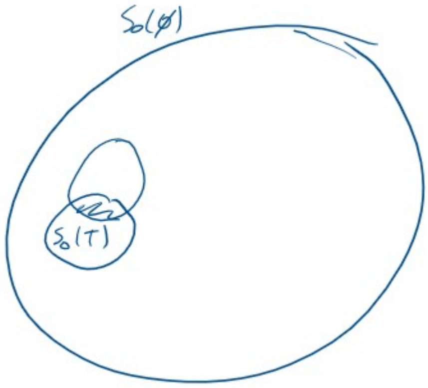
Aufgabe 1

Sei L eine Sprache. Für $n \in \mathbb{N}$ und T eine Theorie, sei $S_n(T)$ der Stone-Raum der Typen von T. Wir betrachten zuerst den Spezialfall $S_0(\emptyset)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Elemente von $S_0(\emptyset)$ genau die vollständigen Theorien $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ für L-Strukturen $\mathfrak{A}$ sind.

(c) Sei T eine Theorie. Zeigen Sie, dass $S_0(T) = \{\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \colon \mathfrak{A} \models T\}$. Insbesondere ist $S_0(T)$ eine kompakte Teilmenge von $S_0(\emptyset)$.

$S_0(T) \subset S_0(\emptyset)$.



$S_0(T) = \{ Th(\mathcal{A}) : \mathcal{A} \models T \}$

"$\subset$" Sei $p \in S_0(T)$, p ist maximal (konsistent mit T)

d.h.: $\exists \mathcal{A} \models T \cup p$ $\leftarrow$

Beh.: $p = Th(\mathcal{A}) = \{ \psi : \mathcal{A} \models \psi \}$

Bew.: $p \cup T \subset Th(\mathcal{A})$

$\Rightarrow Th(\mathcal{A})$ ist konsistent mit T $\Rightarrow Th(\mathcal{A}) \subset p \Rightarrow Th(\mathcal{A}) = p$ $\square$

"$\supset$" $Th(\mathcal{A})$ für ein $\mathcal{A} \models T$.

Beh.: $Th(\mathcal{A})$ ist maximal

Bew.: Sei ψ eine Aussage $Th(\mathcal{A}) \cup \{\psi\}$ ist konsistent mit T.

[Falls $\psi \notin Th(\mathcal{A}) \Rightarrow \neg\psi \in Th(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A} \models \neg\psi \wedge \psi = \bot$ ↯

$\Rightarrow \psi \in Th(\mathcal{A})$. $\Rightarrow Th(\mathcal{A})$ maximal $\Rightarrow Th(\mathcal{A}) \in S_0(T)$. $\square$

(b) In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass aus dem Kompaktheitssatz folgt, dass der Stone Raum $S_n(T)$ kompakt ist. Zeigen Sie, dass die Kompaktheit von $S_0(\emptyset)$ den Kompaktheitssatz impliziert.

Verwenden Sie folgende Charakterisierung von Kompaktheit: Für jede Familie $\mathcal{U} = \{P_i\}_{i \in I}$ von abgeschlossenen Teilmengen P_i und jede endliche Teilmenge $J \subseteq I$ gilt:

$$\Big(\forall J \subseteq I, |J| < \infty : \bigcap_{j \in J} P_j \neq \emptyset \Big) \implies \bigcap_{i \in I} P_i \neq \emptyset.$$

Sei T eine endlich erfüllbare Theorie.

Beh.: T ist konsistent.

Bew.: $\mathcal{U} = \{ [\varphi] \}_{\varphi \in T}$, $[\varphi] = \{ p \in S_0(\emptyset) : \varphi \in p \}$

Sei $\Delta \subset T$ endlich, $\exists \mathcal{A}_\Delta \models \Delta$.

$\overset{(1)}{\Longrightarrow}$ $Th(\mathcal{A}_\Delta) \in \bigcap_{\varphi \in \Delta} [\varphi] \neq \emptyset$.

$\Rightarrow$ $\exists \underline{\underline{p}} \in \bigcap_{\varphi \in T} [\varphi] \neq \emptyset$ weil $T \subset p$

$\overset{(1)}{\Longrightarrow}$

$\stackrel{\text{V}}{=}$ weil $T \subset p$

$\varphi \in T$

$\stackrel{(1)}{\Rightarrow}$ $\underline{\exists \mathcal{A}}$: $p = Th(\mathcal{A})$ und $Th(\mathcal{A}) \models T$, $T \subset Th(\mathcal{A})$.

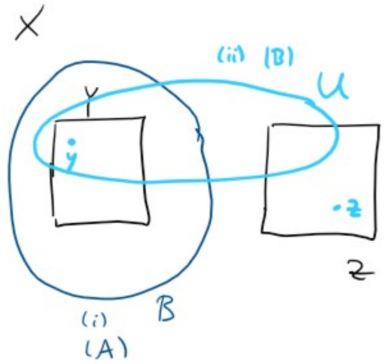
$\Rightarrow$ T ist konsistent. $\square$

(d) Interpretieren Sie das Trennungslemma 3.7 (Vorlesung 6) als Spezialfall des folgenden Lemmas:

Lemma 1: Sei X ein topologischer Raum und $Y, Z \subseteq X$ kompakt (möglicherweise nicht Hausdorff). Sei $\mathcal{U}$ eine Familie von Mengen, die offen und abgeschlossen sind. Dann sind äquivalent:

(i) Es gibt eine positive Boolsche Kombination B aus Elementen von $\mathcal{U}$ (B besteht aus endlich vielen Vereinigungen und Schnitten aus Elementen von $\mathcal{U}$), so dass $Y \subseteq B$ und $Z \cap B = \emptyset$.

(ii) Für jedes $y \in Y$ und $z \in Z$ gibt es ein $\underset{[\varphi]}{U} \in \mathcal{U}$, so dass $y \in U$ und $z \notin U$.



Lem 3.7: Sei T_1, T_2 Theorien, $\mathcal{H}$ eine Menge von Aussagen abgeschlossen unter $\wedge$, $\vee$ und $\top, \perp \in \mathcal{H}$.

(A) $\exists \varphi \in \mathcal{H}$: $T_1 \vdash \varphi$ und $T_2 \vdash \neg\varphi$ (φ trennt T_1 von T_2)

$\Updownarrow$

(B) $\forall \mathcal{A}_1 \models T_1$, $\mathcal{A}_2 \models T_2$: $\exists \varphi \in \mathcal{H}$: $\mathcal{A}_1 \models \varphi$, $\mathcal{A}_2 \models \neg\varphi$.

<u>Wir zeigen:</u> $X = S_0(\emptyset)$. $Y = S_0(T_1)$, $Z = S_0(T_2)$. $\mathcal{U} = \{[\varphi]\}_{\varphi \in \mathcal{H}}$.

(i) $\Leftrightarrow$ (A)

<u>Bemerkung</u>: $Y \subset [\varphi] \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} \{Th(\mathcal{A}) : \mathcal{A} \models T_1\} \subset \{p \in S_0(\emptyset) : \varphi \in p\}$

$\Leftrightarrow \forall \mathcal{A} \models T_1$: $Th(\mathcal{A}) \ni \varphi$

$\mathcal{A} \models \varphi$

$\Leftrightarrow T_1 \vdash \varphi$

positive Boolsche Kombinationen B sind von der Form $[\varphi_1] \cup [\varphi_2] = [\varphi_1 \vee \varphi_2] \Rightarrow B \in \mathcal{U}$.

$\cap$ $\wedge$

<u>(A)</u> $\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{U}$: $Y \subset [\varphi]$, $Z \subset [\neg\varphi] = [\varphi]^c \Rightarrow Z \cap [\varphi] = \emptyset$. $\Leftrightarrow$ (i).

(B) $\Leftrightarrow$ (ii)

<u>Bemerkung</u>: $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in Th(\mathcal{A}) \Leftrightarrow Th(\mathcal{A}) \in [\varphi]$.

(B) $\Leftrightarrow$ $\forall \underset{Th(\mathcal{A}_1)}{\underset{\shortparallel}{y}} \in Y$, $z \in Z$: $\exists [\varphi] \in \mathcal{U}$: $y \in [\varphi]$, $z \in [\neg\varphi] = [\varphi]^c$

$z \notin [\varphi]$. $\Leftrightarrow$ (ii).

$$\begin{array}{ccc} (A) & \stackrel{\text{Le 3.7}}{\Longleftrightarrow} & (B) \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ (i) & \stackrel{\text{Lem 1}}{\Longleftrightarrow} & (ii) \end{array}$$

Lemma 1: Sei X ein topologischer Raum und Y, Z ⊆ X kompakt (mög-

(i) $\overset{\text{kein 1}}{\Longleftrightarrow}$ (ii)

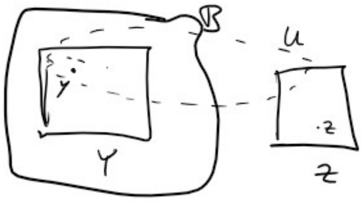
(e) *Lemma 1: Sei X ein topologischer Raum und $Y, Z \subseteq X$ kompakt (möglicherweise nicht Hausdorff). Sei $\mathcal{U}$ eine Familie von Mengen, die offen und abgeschlossen sind. Dann sind äquivalent:*

(i) Es gibt eine positive Boolsche Kombination B aus Elementen von $\mathcal{U}$ (B besteht aus endlich vielen Vereinigungen und Schnitten aus Elementen von $\mathcal{U}$), so dass $Y \subseteq B$ und $Z \cap B = \emptyset$.

(ii) Für jedes $y \in Y$ und $z \in Z$ gibt es ein $U \in \mathcal{U}$, so dass $y \in U$ und $z \notin U$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sei B eine pos. Boolsche Komb. aus $\mathcal{U}$. Sei $y \in Y$, $z \in Z$.

⚠ $B \notin \mathcal{U}$.



<u>Beh:</u> Es gibt ein $U \in \mathcal{U}$: $y \in U$, $z \notin U$.

<u>Bew:</u> Induktion über $\# \cup, \cap$ in B.

<u>$n=0$</u>: $B \in \mathcal{U}$.

$n \geq 1$: Falls $\underset{y\in}{}\; B \underset{\not\ni z}{=} B_1 \cup B_2$, dann $y \in B_1$ oder $y \in B_2$

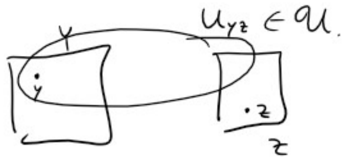
$\underbrace{z \notin B_1}$ $\quad z \notin B_2$

Induktionsvoraussetzung. B_1.

Falls: $B = B_1 \cap B_2$, dann $\overbrace{y \in B_1}$ und $y \in B_2$

$z \notin B_1$ oder $z \notin B_2$ $\square$

(ii) $\Rightarrow$ (i)



Fixiere z.

$$Y \subset \bigcup_{y \in Y} U_{yz} \quad \text{offene Überdeckung} \overset{Y \text{ kpkt}}{\Longrightarrow} \exists n : Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i z} =: P_z \not\ni z$$

abgeschlossen.

$z \in P_z^c \leftarrow$ offen.

$$Z \subset \bigcup_{z \in Z} P_z^c \quad \text{offene Überdeckung} \overset{Z \text{ kpkt}}{\Longrightarrow} \exists m : Z \subset \bigcup_{j=1}^{m} P_{z_j}^c .$$

$$B := \Big(\underbrace{\bigcup_{j=1}^{m} P_{z_j}^c}_{\substack{\cup \\ Z}}\Big)^c = \bigcap_{j=1}^{m} \underbrace{P_{z_j}}_{\substack{\cup \\ Y}} = \bigcap_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i z_j} \quad ✓$$

$Y \subset B$. $\Leftrightarrow$ $Z \subset B^c$ $\Longrightarrow$ $Z \cap B = \emptyset$. $\square$

(f) Wenden Sie Lemma 1 auf $S_n(T)$ an, um folgendes Lemma zu beweisen:

Lemma 2: Seien $C_1, C_2 \subseteq S_n(T)$ abgeschlossen und disjunkt. Dann gibt es L-Formeln φ_1, φ_2 mit $C_1 \subseteq [\varphi_1], C_2 \subseteq [\varphi_2]$ und $[\varphi_1] \cap [\varphi_2] = \emptyset$.

$C_1, C_2 \subset S_n(T)$ kompakt. $\longrightarrow$ C_1, C_2 kompakt.

$\mathcal{U} = \{[\varphi]\}$
φ Formeln.

Wir zeigen (ii): Sei $p_1 \in C_1$, $p_2 \in C_2$ ∴ $\Rightarrow p_1 \neq p_2 \Rightarrow \exists \varphi \in p_1 \setminus p_2$.

$p_1 \in [\varphi]$, $p_2 \notin [\varphi] \iff$ (ii)

Lemma 1 $\Rightarrow$ (i) $\exists B = [\psi]$, $C_1 \subset B$, $C_2 \cap B = \emptyset$.

$C_2 \subset B^c = [\psi]^c = [\neg\psi]$.

$\varphi_1 = \psi$, $\varphi_2 = \neg\psi$.

$[\varphi_1] \cap [\varphi_2] = [\varphi_1 \wedge \varphi_2] = [\psi \wedge \neg\psi] = [\bot] = \emptyset$.

g) (g) Folgern Sie wie in der Vorlesung:

Lemma 4.11.2: Jede Teilmenge von $S_n(T)$, die sowohl abgeschlossen als auch offen ist, ist von der Form $[\varphi]$ für eine L-Formel φ.

Sei $C \subset S_n(T)$. $C_1 = C$, $C_2 = C^c$.

$\xRightarrow{\text{Lemma 2}}$ $C \subset [\varphi]$, $C^c \subset [\varphi]^c \iff [\varphi] \subset C \Rightarrow [\varphi] = C$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass es für jedes $n > 2$ eine abzählbare vollständige Theorie gibt mit genau n abzählbaren Modellen, bis auf Isomorphie.

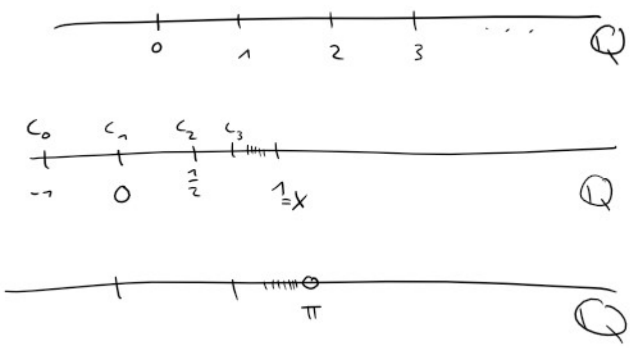
Hinweis: Betrachte $(\mathbb{Q}, <, \cancel{P_1, \ldots, P_{n-2}}, c_0, c_1, \ldots)$ wobei die P_i eine Partitionierung in dichte Teilmengen von $\mathbb{Q}$ sind und die c_i eine aufsteigende Folge von Elementen in P_1 formen.

$\underline{n = 3}$: $L = \{ <, c_0, c_1, c_2, \ldots \}$ c_i Konstanten.

$T = T_{DLO} \cup \{ c_i < c_{i+1} : \forall i \in \mathbb{N} \}$

Drei Modelle: Universen sind immer $\mathbb{Q}$, und $<$ die übliche Relation.

- $\mathcal{A}_\infty$: $c_0^{\mathcal{A}_\infty} = 0$, $c_1^{\mathcal{A}_\infty} = 1$, $c_i^{\mathcal{A}_\infty} = i$.
- $\mathcal{A}_1$: $c_0^{\mathcal{A}_1} = -1$, $c_i^{\mathcal{A}_1} = 1 - \frac{1}{i}$
- $\mathcal{A}_\pi$: $\lim_{i \to \infty} c_i = \pi$



- Die Modelle sind nicht isomorph.

  In $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_\pi$ gibt es $x \in \mathbb{Q} : \forall i \in \mathbb{N} : c_i < x$. $\Rightarrow \mathcal{A}_\infty \not\cong \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_\pi$

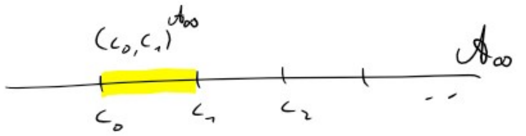
  In $\mathcal{A}_1$ gilt: $\forall y < x : \exists i \in \mathbb{N} : y < c_i$. $\Rightarrow \mathcal{A}_\pi \not\cong \mathcal{A}_1$.

- Jedes abzählbare Modell von T ist isomorph zu $\mathcal{A}_\infty$, $\mathcal{A}_1$ oder $\mathcal{A}_\pi$.

- Jeder abzählbare Modell von T ist isomorph zu $\mathcal{A}_\infty$, $\mathcal{A}_1$ oder $\mathcal{A}_\pi$.

<u>Idee:</u> Back-and-Forth auf Teilmengen:

$$(-\infty, c_0) := \{x : x < c_0\}$$
$$(c_i, c_{i+1}) := \{x : c_i < x < c_{i+1}\}$$
$$(c_\infty, \infty) := \{x : \forall i \in \mathbb{N}: c_i < x\}.$$



Sei $\mathcal{A} \models T$ abzählbarer Modell.

<u>Falls</u> $(c_\infty, \infty)^{\mathcal{A}} = \emptyset$, dann finden Isom: $f_i : (c_i, c_{i+1})^{\mathcal{A}} \xrightarrow{\sim} (c_i, c_{i+1})^{\mathcal{A}_\infty}$

$f_{-\infty} : (-\infty, c_0)^{\mathcal{A}} \xrightarrow{\sim} (-\infty, c_0)^{\mathcal{A}_\infty}$.

Baue daraus $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_\infty$.

$c_i^{\mathcal{A}} \longrightarrow c_i^{\mathcal{A}_\infty}$

$x \longmapsto f_i(x)$ für das richtige i.

<u>Sonst</u>: Falls $\exists x \in \mathcal{A}\ \forall i \in \mathbb{N}: c_i^{\mathcal{A}} < x \ \wedge\ \forall y < x\ \exists i \in \mathbb{N}: c_i^{\mathcal{A}} < y$,

dann baue Isomorphismus zu $\mathcal{A}_1$. gleich wie oben.

- T ist vollständig.

Wir zeigen, dass T Quantorenelimination hat:

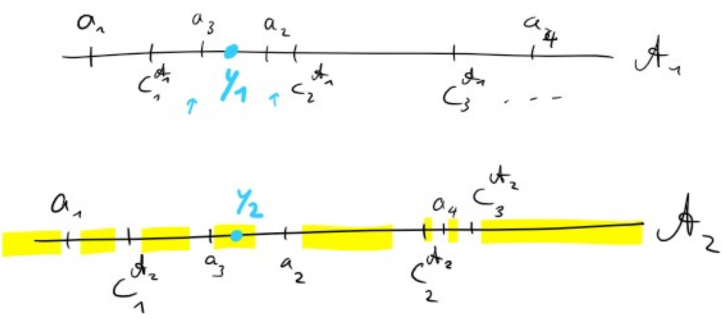
Sei $\exists y\, \varphi$ eine primitive Existenzformel.

Sei $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \models T$ mit $\mathcal{A}_1 \models \exists y\, \varphi(a_1, \dots, a_n, y)$ für $\bar{a} \in \mathcal{A}_1^n \cap \mathcal{A}_2^n$.

<u>Beh:</u> $\mathcal{A}_2 \models \exists y\, \varphi(a_1 \dots a_n, y)$.

<u>Bew:</u> Sei $y_1 \in \mathcal{A}_1$: $\mathcal{A}_1 \models \varphi(\bar{a}_1, y_1)$.

$$\varphi = \bigwedge (\neg)(\dots \overset{<}{\doteq} \dots)$$



Unterteilen $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ in Intervalle.

und nehmen $y_2 \in \mathcal{A}$ im entsprechenden Interval.

$\square$.

Primmodell. $\mathbb{N}$, $c_i := i$ $\Rightarrow$ T vollständig.

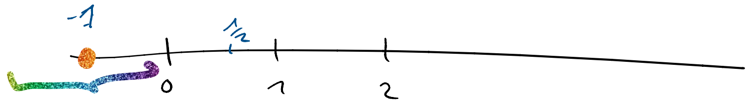
<u>Bemerkungen:</u> $n > 3$: $P_1, \dots P_{n-2}$ dichte Partitionen und es gibt weitere Modelle vom Typ $\mathcal{A}_1$ wobei $P_j(1)$ gelten

Modelle vom Typ $\mathcal{A}_1$ wobei $P_j(1)$ gelten oder nicht.

$$S_0(T) = \{ Th(\mathcal{A}) : \mathcal{A} \models T \}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vollständigkeit}}}{Th(\mathcal{A}_\infty) = Th(\mathcal{A}_1) = Th(\mathcal{A}_\pi)} \implies \boxed{S_0(T) = \{p\}}$$

$$S_1(T) = \{ \underbrace{tp^{\mathcal{A}_\infty}(-1)}, \; tp^{\mathcal{A}_\infty}(\tfrac{1}{2}), \dots, \; tp^{\mathcal{A}_1}(10) \} =$$



$\mathcal{A}_1 \Rightarrow \mathcal{A}_\infty, \; \mathcal{A}_\pi$.