§ 4 Abzählbare Modelle

L ist wieder eine beliebige, feste Sprache.

§ 4.1 Der Typenvermeidungssatz (Omitting types theorem)

Def. 4.1: Seien T eine L-Theorie und $\Sigma(x)$ eine Menge von L-Formeln (ein „partieller Typ").

- Ein Modell $\mathcal{A} \models T$, welches $\Sigma(x)$ nicht realisiert, vermeidet $\Sigma(x)$.
- Eine Formel $\varphi(x)$ isoliert $\Sigma(x)$ (in T), falls $\varphi(x)$ konsistent mit T ist und

$$T \vdash \forall x(\varphi(x) \to \sigma(x)) \quad \text{für alle } \sigma(x) \in \Sigma(x).$$

Satz 4.2 (Omitting types): Sei T abzählbar und konsistent und $\Sigma(x)$ eine Menge von L-Formeln, die nicht in T isoliert ist. Dann hat T ein Modell, welches $\Sigma(x)$ vermeidet.

Def 4.3: Sei C eine Menge neuer Konstanten. Eine $L(C)$-Theorie T^* ist eine Henkin-Theorie, falls es für jede $L(C)$-Formel $\varphi(x)$ eine Konstante $c \in C$ gibt, sodass T^* die Formel

$$\exists x\, \varphi(x) \to \varphi(c)$$

enthält.
Die Elemente der Menge C heißen dann die Henkin-Konstanten von T^*.

Lemma 4.4: Jede konsistente Henkin-Theorie T^* hat ein (bis auf Isomorphie eindeutiges) Modell $\mathfrak{A}$, welches nur aus Konstanten besteht, d.h.

$$(\mathfrak{A}, a_c)_{c \in C} \models T^*,$$

wobei $A = \{a_c \mid c \in C\}$.

§ 4.2 Der Typenraum

In diesem Abschnitt ist T eine beliebige, feste L-Theorie.

Def 4.5:

- Ein <u>n-Typ</u> (von T) ist eine maximale Menge von Formeln $p(x_1, \ldots, x_n)$, die konsistent mit T ist.
- Wir schreiben $S_n(T)$ für die Menge aller n-Typen von T.
  " " $S(T)$ für $S_1(T)$.

- Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine L-Formel. Dann schreiben wir $[\varphi]$ für die Menge aller Typen, die φ enthalten.

Lem 4.6:

1. $[\varphi] = [\psi]$ genau dann wenn φ und ψ äquivalent modulo T sind.
2. Die Mengen $[\varphi]$ sind abgeschlossen unter Boolschen Operationen. Genauer gesagt:
   $[\varphi] \cap [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$,
   $[\varphi] \cup [\psi] = [\varphi \vee \psi]$,
   $S_n(T) \setminus [\varphi] = [\neg\varphi]$,
   $S_n(T) = [\top]$,
   $\emptyset = [\bot]$.

Kor. 4.7: Die Menge $M = \{[\varphi] \mid \varphi \in S_n(T)\}$ ist die Basis einer Topologie $\mathcal{O} = \{\bigcup_N [\varphi] \mid N \subseteq M\}$ auf $S_n(T)$.

Wir bezeichnen den topologischen Raum $(S_n(T), \mathcal{O})$ als <u>Stone Raum</u> (von T).

Lem. 4.8: $S_n(T)$ ist ein kompakter Hausdorff Raum.

Def. 4.9: Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ L-Strukturen, $A_0 \subseteq A$ und $f: A_0 \to B$.
Die Abbildung f heißt <u>elementar</u>, wenn sie die Gültigkeit von Formeln erhält, d.h. falls für jede L-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und $\bar{a} \in A_0$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi(\bar{a}) \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi(f(\bar{a})).$$

Lem 4.10: Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ L-Strukturen und $A_0 \subseteq A$, $B_0 \subseteq B$. Jede elementare Abbildung $f: A_0 \to B_0$ induziert eine stetige surjektive Abbildung $S(f): S_n(B_0) \to S_n(A_0)$.

Lem 4.11:

1. Jedes $[\varphi] \in M$ ist sowohl offen, als auch abgeschlossen in $S_n(T)$.
(D.h. $S_n(T)$ ist „0-dimensional".)

2. Alle Teilmengen von $S_n(T)$, die sowohl offen, als auch abgeschlossen sind, sind von der Form $[\varphi]$ für eine L-Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, liegen also in M.

Lem 4.12: Sei $p \in S_n(T)$ und $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ eine L-Formel. Dann sind äquivalent:

1. φ isoliert p
2. $[\varphi] = \{p\}$, d.h. p ist ein isolierter Punkt im Raum $S_n(T)$.
3. $p = \{\psi(\bar{x}) \mid T \vdash \forall \bar{x} \, (\varphi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x}))\}$.

Wir nennen φ dann <u>vollständig</u> und p einen <u>isolierten Typen</u> (oder Haupttypen).