§ 4 Abzählbare Modelle

L ist wieder eine beliebige, feste Sprache.

§ 4.1 Der Typenvermeidungssatz (Omitting types theorem)

Def. 4.1: Seien T eine L-Theorie und $\Sigma(x)$ eine Menge von L-Formeln (ein „partieller Typ").

- Ein Modell $\mathfrak{A} \models T$, welches $\Sigma(x)$ nicht realisiert, vermeidet $\Sigma(x)$.
- Eine Formel $\varphi(x)$ isoliert $\Sigma(x)$ (in T), falls $\varphi(x)$ konsistent mit T ist und

$$T \vdash \forall x(\varphi(x) \rightarrow \sigma(x)) \quad \text{für alle } \sigma(x) \in \Sigma(x).$$

Satz 4.2 (Omitting types): Sei T abzählbar und konsistent und $\Sigma(x)$ eine Menge von L-Formeln, die nicht in T isoliert ist. Dann hat T ein Modell, welches $\Sigma(x)$ vermeidet. „Modell mit Eigenschaften"

Bem.: $\Sigma(x)$ isoliert durch $\varphi(x)$, $\mathfrak{A} \models T$

$\Rightarrow \Sigma(x)$ realisiert in $\mathfrak{A}$ durch alle Realisierungen von $\varphi(x)$

$\rightsquigarrow$ Umkehrung wahr für vollst. T: $\Sigma(x)$ isoliert in T, dann realisiert in jedem Modell

Def 4.3: Sei C eine Menge neuer Konstanten. Eine $L(C)$-Theorie T^* ist eine Henkin-Theorie, falls es für jede $L(C)$-Formel $\varphi(x)$ eine Konstante $c \in C$ gibt, sodass T^* die Formel

$$\exists x\, \varphi(x) \rightarrow \varphi(c)$$

enthält.
Die Elemente der Menge C heißen dann die Henkin-Konstanten von T^*.

Lem 4.4: Jede konsistente Henkin-Theorie T^* hat ein (bis auf Isomorphie eindeutiges) Modell $\mathfrak{A}$, welches nur aus Konstanten besteht, d.h.

$$(\mathfrak{A}, a_c)_{c\in C} \models T^*,$$

wobei $A = \{a_c \mid c \in C\}$.

Bew.: T^* konsistent $\Rightarrow$ gibt Modell $T^* \models (\mathfrak{A}', a_c)_{c\in C}$.

$A := \{a_c \mid c \in C\} \subseteq A'$.

Beh.: A ist Universum einer elementaren U'struktur von $\mathfrak{A}'$.

Bew.: Tarskis Test (Satz 2.2): zeige, dass jede $L(A)$-Formel $\varphi(x)$, die in $\mathfrak{A}'$ erfüllbar ist, durch ein Elt. in A erfüllt wird.

Sei $\varphi(x)$ so eine Formel.

Da T^* Henkin-Theorie: gibt $c \in C$, s.d.

$$\exists x\, \varphi(x) \rightarrow \varphi(c).$$

Aber: $\mathfrak{A}' \models \exists x\, \varphi(x)$, $\mathfrak{A}' \models T^*$, also

$$\mathfrak{A}' \models \varphi(a_c), \quad a_c \in A.$$

$\Rightarrow (\mathfrak{A}, a_c)$ ist auch Modell von T. $\square$

Bew. des Typenvermeidungssatzes: Voraus. s. dort.

Wähle eine abzählbare Menge C neuer Konstanten.

Ziel: Erweitere T zu einer konsistenten Henkin-Theorie T^* mit folgender Eigenschaft:

(*) Für alle $c \in C$ gibt $\sigma(x) \in \Sigma(x)$, s.d. $\neg\sigma(c) \in T^*$.

Konstruiere T^* als Vereinigung einer aufsteigenden Kette

$$T = T_0 \subseteq T_1 \subseteq \dots$$

konsistenter Erweiterungen von T durch endlich viele $L(C)$-Aussagen.

Wähle Aufzählung der neuen Konst. $C = \{c_i \mid i < \omega\}$ und der $L(C)$-Formeln $\{\varphi_i(x) \mid i < \omega\}$.

<u>Ang. T_{2i} ist konstruiert</u>

Dann wähle $c \in C$, welche nicht in $T_{2i} \cup \{\varphi_i(x)\}$ vorkommt und def.

$$T_{2i+1} := T_{2i} \cup \{\exists x\ \varphi_i(x) \rightarrow \varphi_i(c)\}$$

Klar: T_{2i+1} konsistent.

<u>Ang. T_{2i+1} ist konstruiert</u>

Nach Annahme $T_{2i+1} = T \cup$ "endl. Menge von $L(C)$-Formeln"

$\Rightarrow T_{2i+1}$ ist äquivalent zu $\underbrace{T \cup \{\delta(c_i, \bar{c})\}}$ für eine L-Formel $\delta(x, \bar{y})$ und ein Tupel $\bar{c} \in C$, welches c_i nicht enthält.

$\underbrace{\exists \bar{y}\ \delta(x, \bar{y})}_{L\text{-Formel}}$ isoliert $\Sigma(x)$ nicht (nach Vor.)

$\rightsquigarrow$ gilt $\sigma(x) \in \Sigma(x)$, s.d. $\exists \bar{y}\ \delta(x, \bar{y}) \wedge \neg \sigma(x)$ konsistent mit T.

$\rightsquigarrow$ Setze $T_{2i+2} = T_{2i+1} \cup \{\neg \sigma(c_i)\}$

$\rightsquigarrow$ konsistent und $(*)$ für c_i erfüllt.

Es gilt:
- T^* konsistent
- T^* Henkin-Theorie, $(*)$

$\cdot (*)$

Nach Lemma 4.4 gibt es ein Modell von T^*, das nur aus Henkin-Konstanten besteht.

$\rightsquigarrow \mathcal{A} \models T$ und $(*)$ $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ vermeidet $\Sigma(x)$. $\square$

§ 4.2 Der Typenraum

In diesem Abschnitt ist T eine beliebige, feste L-Theorie.

Def 4.5:

- Ein <u>n-Typ</u> (von T) ist eine maximale Menge von Formeln $p(x_1, \dots, x_n)$, die konsistent mit T ist.
- Wir schreiben $S_n(T)$ für die Menge aller n-Typen von T.
  " " $S(T)$ für $S_n(T)$.

Bem.: $B \subset A$, $\mathcal{A}$ L-Struktur $\Rightarrow S_n^{\mathcal{A}}(B) = S_n(\mathrm{Th}(\mathcal{A}_B))$

Insbesondere: T vollst., $T \models \mathcal{A} \Rightarrow S_n^{\mathcal{A}}(\emptyset) = S_n(T)$.

- Sei $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ eine L-Formel. Dann schreiben wir $[\varphi]$ für die Menge aller Typen, die φ enthalten.

Lem 4.6:

1. $[\varphi] = [\psi]$ genau dann wenn φ und ψ äquivalent modulo T sind.
2. Die Mengen $[\varphi]$ sind abgeschlossen unter Boolschen Operationen. Genauer gesagt:

$$[\varphi] \cap [\psi] = [\varphi \wedge \psi],$$

$$[\varphi] \cup [\psi] = [\varphi \vee \psi],$$

$$S_n(T) \setminus [\varphi] = [\neg \varphi],$$

$$S_n(T) = [\top],$$

$$\emptyset = [\bot].$$

Bew.: 1.

„$\Leftarrow$" klar.

„$\Rightarrow$" Ang.: φ, ψ nicht äquiv. mod T. Dann $\varphi \wedge \neg\psi$ oder

$\neg\varphi \wedge \psi$ konsistent mit T, oBdA $\varphi \wedge \neg\psi$.

$\Rightarrow \{\varphi, \neg\psi\}$ ist einem Typen p enthalten

$\Rightarrow p \in [\varphi]$, aber $p \notin [\psi]$.

$\Rightarrow [\varphi] \neq [\psi]$.

$\square$

2. Übung

Kor. 4.7: Die Menge $M = \{[\varphi] \mid \varphi \in S_n(T)\}$ ist die Basis einer Topologie $\mathcal{O} = \{\bigcup_N [\varphi] \mid N \subseteq M\}$ auf $S_n(T)$.

Wir bezeichnen den topologischen Raum $(S_n(T), \mathcal{O})$ als Stone Raum (von T).

$\rightarrow$ Schreibe $S_n(T) = (S_n(T), \mathcal{O})$.

Lem. 4.8: $S_n(T)$ ist ein kompakter Hausdorff Raum.

Bew.: Hausdorff

Seien $p \neq q \in S_n(T)$. Dann gibt es eine L-Formel

s.d. $\varphi \in p$ und $\varphi \notin q$.

$\Rightarrow [\varphi]$, und $[\neg\varphi]$ sind offene Mengen, $p \in [\varphi]$, $q \in [\neg\varphi]$.

Kompakt: Zeige über endliche Schnitteigenschaft

$\mathcal{U} = \{[\varphi_i] \mid i \in I\}$, s.d. jede endliche Teilmenge von $\mathcal{U}$ nicht-leeren Schnitt hat. Z: $\bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset$.

Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_k \in I$:

Es gibt einen Typen $p \in [\varphi_{i_1}] \cap \ldots \cap [\varphi_{i_k}]$, also $\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k} \in p$.

$\Rightarrow \varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}$ konsistent mit T.

Kor 2.9 (aus Kpt'satz): $\{\varphi_i \mid i \in I\}$ konsistent mit T.
$\Rightarrow \bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset$. $\square$