Def. 4.9: Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ L-Strukturen, $A_0 \subseteq A$ und $f: A_0 \to B$.
Die Abbildung f heißt <u>elementar</u>, wenn sie die Gültigkeit von Formeln erhält, d.h. falls für jede L-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und $\bar{a} \in A_0$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi(\bar{a}) \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi(f(\bar{a})).$$

Lem 4.10: Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ L-Strukturen und $A_0 \subseteq A$, $B_0 \subseteq B$. Jede elementare Abbildung $f: A_0 \to B_0$ induziert eine stetige surjektive Abbildung $S(f): S_n(B_0) \to S_n(A_0)$.

Lem 4.11:
1. Jedes $[\varphi] \in M$ ist sowohl offen, als auch abgeschlossen in $S_n(T)$.
(D.h. $S_n(T)$ ist „0-dimensional".)
2. Alle Teilmengen von $S_n(T)$, die sowohl offen, als auch abgeschlossen sind, sind von der Form $[\varphi]$ für eine L-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, liegen also in M.

Lem 4.12: Seien $p \in S_n(T)$ und $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ eine L-Formel. Dann sind äquivalent:

1. φ isoliert p
2. $[\varphi] = \{p\}$, d.h. p ist ein isolierter Punkt im Raum $S_n(T)$.
3. $p = \{\psi(\bar{x}) \mid T \vdash \forall \bar{x} \, (\varphi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x}))\}$.

Wir nennen φ dann <u>vollständig</u> und p einen <u>isolierten Typen</u> (oder Haupttypen).

§4.3 $\aleph_0$-kategorische Theorien

Satz 4.13 (Ryll-Nardzewski): Sei T eine abzählbare, vollständige L-Theorie. Dann ist T $\aleph_0$-kategorisch gdw es für jedes $n \in \mathbb{N}$ endlich viele L-Formeln $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ modulo T gibt.

Def 4.14: Eine L-Struktur $\mathcal{A}$ ist ω-saturiert falls alle (1-)Typen über endlichen Teilmengen von A in $\mathcal{A}$ realisiert werden.

Lem 4.15: Sind $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ abzählbare und ω-saturierte L-Strukturen, die elementar äquivalent sind, dann sind sie isomorph.

Satz 4.16: Sei T eine abzählbare, vollständige L-Theorie.
Dann sind äquivalent:

1) T ist $\aleph_0$-kategorisch
2) Jedes abzählbare Modell von T ist ω-saturiert.
3) Für jedes n gibt es nur endlich viele Formeln $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ mod T.
4) Für jedes n ist $S_n(T)$ endlich.

Kor. 4.16: Sei $\mathcal{A}$ eine L-Struktur und $a_1, \dots, a_n \in A$. Dann ist $Th(\mathcal{A})$ $\aleph_0$-kategorisch gdw $Th(\mathcal{A}, a_1, \dots, a_n)$ $\aleph_0$-kategorisch ist.