Def. 4.9: Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ $\mathcal{L}$-Strukturen, $A_0 \subseteq A$ und $f: A_0 \to B$.
Die Abbildung f heißt <u>elementar</u>, wenn sie die Gültigkeit von Formeln erhält, d.h. falls für jede $\mathcal{L}$-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und $\bar{a} \in A_0$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi(\bar{a}) \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi(f(\bar{a})).$$

$\Leftarrow$, denn $\mathcal{A} \models \neg\varphi(\bar{a}) \Rightarrow \mathcal{B} \models \neg\varphi(f(\bar{a}))$,
also falls nicht $\mathcal{A} \models \varphi(\bar{a})$, dann nicht $\mathcal{B} \models \varphi(f(\bar{a}))$

$\leadsto$ Die leere Abb. elt.
$\Leftrightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$

f elementare Einbettung $\Leftrightarrow$ f def. auf ganz A.

Lem 4.10: Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ $\mathcal{L}$-Strukturen und $A_0 \subseteq A$, $B_0 \subseteq B$. Jede elementare Abbildung $f: A_0 \to B_0$ induziert eine stetige surjektive Abbildung $S(f): S_n(B_0) \to S_n(A_0)$.

Bew.: Für $q \in S_n(B_0)$, definiere

$$S(f)(q) := \{\varphi(x_1, \ldots, x_n, \bar{a}) \mid \bar{a} \in A_0, \varphi(x_1, \ldots, x_n, f(\bar{a})) \in q\}$$

$\mathcal{L}(A_0)$-Formel $\qquad\qquad$ $\mathcal{L}(B_0)$-Formel

<u>$S(f)$ ist wohldef. Abbildung</u>, d.h. $S(f)(q) \in S_n(A_0)$,
also ist max. endl. erfüllbar
$\varphi_1(\bar{x}, \bar{a}_1), \ldots, \varphi_k(\bar{x}, \bar{a}_k) \in S(f)(q)$ erfüllbar
$\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \exists \bar{x}\, \varphi_1(\bar{x}, \bar{a}_1) \wedge \ldots \wedge \varphi_k(\bar{x}, \bar{a}_k)$
$\Leftrightarrow \mathcal{B} \models \exists \bar{x}\, \varphi_1(\bar{x}, f(\bar{a}_1)) \wedge \ldots \wedge \varphi_k(\bar{x}, f(\bar{a}_k))$
f elementar
$\Leftrightarrow \varphi_1(\bar{x}, f(\bar{a}_1)), \ldots, \varphi_k(\bar{x}, f(\bar{a}_k))$ erfüllbar

$S(f)$ surjektiv:

Sei $p \in S_n(A_0)$. Dann ist

$$\{\varphi(x_1, \ldots, x_n, f(\bar{a})) \mid \varphi(x_1, \ldots, x_n, \bar{a}) \in p\}$$

max. endl. erfüllbar. (wie bei Wohldef.)

$\rightsquigarrow$ gibt Typen $q \in S_n(B_0)$, s. d. $S(f)(q) = p$]

$S(f)$ stetig:

$$S(f)^{-1}([\underbrace{\varphi(x_1, \ldots, x_n, \bar{a})}_{\text{Basis-offen in } S_n(A_0)}]) = [\underbrace{\varphi(x_1, \ldots, x_n, f(\bar{a}))}_{\text{Basis offen in } S_n(B_0)}]$$ $\square$

Wichtigste Bsp.:

- Eine elementare Bij. $f: A_0 \to B_0$ definiert $S(f)$ eine Homöomorphismus $S_n(B_0) \to S_n(A_0)$.
- Ist $A = B$, $A_0 \subseteq B_0$, dann ind. die Inklusion $A_0 \hookrightarrow B_0$ die Einschränkung $S_n(B_0) \to S_n(A_0)$ (falls sie elementar ist).

Lem 4.11:

1. Jedes $[\varphi] \in M$ ist sowohl offen, als auch abgeschlossen in $S_n(T)$. (D.h. $S_n(T)$ ist „0-dimensional".)
2. Alle Teilmengen von $S_n(T)$, die sowohl offen, als auch abgeschlossen sind, sind von der Form $[\varphi]$ für eine L-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, liegen also in M.

Bew.: 1. $[\varphi]$ ist offen nach Def.

Lem 4.6: $S_n(T) \setminus [\varphi] = [\neg\varphi]$, also Komplement auch offen

2. Serie 6: Geg. $C_1, C_2 \subseteq S_n(T)$ abg., disjunkt. Dann gibt es $[\varphi_1], [\varphi_2] \in M$, s.d. $C_1 \subseteq [\varphi_1]$, $C_2 \subseteq [\varphi_2]$ und $[\varphi_1] \cap [\varphi_2] = \emptyset$. (à la Trennungslemma)

Dann: Sei $C \subseteq S_n(T)$ sowohl offen als auch abg.

$\rightsquigarrow C, C^c = S_n(T) \setminus C$ sind offen und abg. und disjunkt

$\rightsquigarrow$ finden $[\varphi_1] \supseteq C$, $[\varphi_2] \supseteq C^c$, $[\varphi_1] \cap [\varphi_2] = \emptyset$

$\Rightarrow [\varphi_1] = C$ $\square$

Lem 4.12: Seien $p \in S_n(T)$ und $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ eine L-Formel. Dann sind äquivalent:

1. φ isoliert p
2. $[\varphi] = \{p\}$, d.h. p ist ein isolierter Punkt im Raum $S_n(T)$.
3. $p = \{\psi(\bar{x}) \mid T \vdash \forall \bar{x}\, (\varphi(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{x}))\}$.

Wir nennen φ dann vollständig und p einen isolierten Typen (oder Haupttypen).

Bew: Aufgabe Serie 6.

§4.3 $\aleph_0$-kategorische Theorien

Satz 4.13 (Ryll-Nardzewski): Sei T eine abzählbare, vollständige L-Theorie. Dann ist T $\aleph_0$-kategorisch gdw es für jedes n nur endlich viele L-Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ modulo T gibt.

Def 4.14: Eine L-Struktur $\mathcal{A}$ ist <u>ω-saturiert</u> falls alle (1-)Typen über endlichen Teilmengen von A in $\mathcal{A}$ realisiert werden.

Bem.: Ist $\mathcal{A}$ ω-saturiert, dann werden alle n-Typen über endl. Teilmenge realisiert (für alle n).

Lem 4.15: Sind $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ abzählbare und ω-saturierte L-Strukturen, die elementar äquivalent sind, dann sind sie isomorph.

Bew.: (Wie $\aleph_0$-Kategorizität von DLO)

Wähle Aufzählungen $A = \{a_0, a_1, \dots\}$
$B = \{b_0, b_1, \dots\}$.

Wir definieren eine aufsteigende Folge $f_0 \subseteq f_1 \subseteq \dots$ endl. elementarer Abbildungen

$$f_i : A_i \to B_i$$

zwischen endl. Teilmengen $A_i \subseteq A$, $B_i \subseteq B$, s.d.

$$\bigcup_{i<\omega} A_i = A \quad \text{und} \quad \bigcup_{i<\omega} B_i = B.$$

Setze dann $f := \bigcup f_i$.

$f_0 = \emptyset$. Dass f_0 elementar ist, zeigt genau, dass $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Angen., f_i ist schon konstruiert. Dann def f_{i+1} wie folgt.

Fall $i=2n$: Setze $A_{i+1} := A_i \cup \{a_n\}$. Sei $p(x) = tp(a_n/A_i)$.
Da f_i elementar ist, ist $f_i(p)(x)$ ein Typ in $\mathcal{B}$ über B_i. (vergleiche Lemma 4.10).

$\mathcal{B}$ ist ω-saturiert $\Rightarrow$ $f_i(p)(x)$ wird in $\mathcal{B}$ realisiert durch $b' \in B$. D.h. es gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi(a_n, \bar{a}) \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi(b', f_i(\bar{a}))$$

für jede L-Formel φ.

$\rightsquigarrow$ Durch $f_{i+1}(a_n) := b'$ erhalten wir eine elt. Abb.

$$f_{i+1}: A_{i+1} \to B_{i+1} := B_i \cup \{b'\}$$

Fall $i=2n+1$: Vertausche die Rollen von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$: Da f_i elementar ist, induziert es eine (surj.) Abb.
$S_n^{B_i \cup \{b_n\}}(B_i) \to S_n^{\mathcal{A}}(A_i)$ (Lemma 4.10).

$\Rightarrow$ Es gibt einen Typen in $\mathcal{A}$ über A_i, der von f_i auf $tp(b_n/B_i)$ geschickt wird.

$\mathcal{A}$ ω-saturiert $\rightsquigarrow$ real. durch a'

$\rightsquigarrow f_{i+1}(a') := b_n$

$\rightsquigarrow f_{i+1}: \underbrace{A_i \cup \{a'\}}_{=: A_{i+1}} \to \underbrace{B_i \cup \{b_n\}}_{=: B_{i+1}}$ elementar

Satz 4.16: Sei T eine abzählbare, vollständige $\mathcal{L}$-Theorie.
Dann sind äquivalent:
1) T ist $\aleph_0$-kategorisch
2) Jedes abzählbare Modell von T ist ω-saturiert.
3) Für jedes n gibt es nur endlich viele Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ mod T.
4) Für jedes n ist $S_n(T)$ endlich.

Bew.:
„3) $\Rightarrow$ 2)" Sei $\mathcal{A} \models T$, $B \subseteq A$, $|B| = n$
Nach Annahme gibt es nur endl. viele $\mathcal{L}$-Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_{n+1})$ mod T.
$\Rightarrow$ Es gibt nur endlich viele $\mathcal{L}(B)$-Formeln $\tilde{\varphi}_1(x), \dots, \tilde{\varphi}_N(x)$ in $\mathcal{A}$ (bis auf Äquivalenz)

Es folgt: Jeder Typ $p(x) \in S(B)$ ist isoliert bzgl. $Th(\mathcal{A}_B)$ durch
$$\varphi_p(x) := \bigwedge_{\tilde{\varphi}_i \in p} \tilde{\varphi}_i(x).$$
$\Rightarrow$ Jedes Elt., das $\varphi_p(x)$ realisiert, realisiert auch den Typen $p(x)$.

„2) $\Rightarrow$ 1)" Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ abzählbare Modelle von T.
T vollständig $\Rightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ (denn $T = Th(\mathcal{A}) = Th(\mathcal{B})$)
2) $\Rightarrow \mathcal{A}, \mathcal{B}$ ω-saturiert
Lemma 4.14: $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$
„$\neg$3) $\Rightarrow$ $\neg$4)": Angen., es gibt unendl. viele Formeln mod T.
Die Menge der Basis-offenen Mengen $M = \{[\varphi] \mid \varphi\ \mathcal{L}\text{-Formel}\}$

ist eine unendliche Überdeckung von $S_n(T)$. (Lemma 4.6.1).

$\rightsquigarrow$ Insbes. $S_n(T)$ unendlich.

„$\neg 4) \Rightarrow \neg 1)$" Ang.: $S_n(T)$ nicht endl.

Beh.: Dann gibt einen nicht isolierten Typen $p \in S_n(T)$.

Ang.: jeder Typ $p \in S_n(T)$ ist isoliert. Dann ist $\{p\}$ offen (Lemma 4.12)

$\rightsquigarrow \{ \{p\} \mid p \in S_n(T)\}$ Überdeckung von $S_n(T)$.

$S_n(T)$ kpt. $\Rightarrow$ gibt endl. Teilüberdeckung

$\Rightarrow S_n(T)$ ist endl. ↯

Abc