Satz 4.16: Sei T eine abzählbare, vollständige L-Theorie.
Dann sind äquivalent:
1) T ist $\aleph_0$-kategorisch
2) Jedes abzählbare Modell von T ist ω-saturiert.
3) Für jedes n gibt es nur endlich viele Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ mod T.
4) Für jedes n ist $S_n(T)$ endlich.

Kor. 4.16: Sei $\mathcal{A}$ eine L-Struktur und $a_1, \dots, a_n \in A$. Dann ist
Th($\mathcal{A}$) $\aleph_0$-kategorisch gdw Th($\mathcal{A}, a_1, \dots, a_n$) $\aleph_0$-kategorisch ist.

Def 4.17: Eine Theorie T heißt <u>schmal</u>, wenn $S_n(T)$ abzählbar ist für alle $n < \omega$.

Lem 4.18: Eine abzählbare vollständige Theorie T ist schmal gdw sie ein abzählbares ω-saturiertes Modell besitzt.

Lem 4.19: Sei T abzählbar und nicht schmal. Dann hat T überabzählbar viele abzählbare Modelle.

Satz 4.20 (Vaught): Eine abzählbare Theorie kann nicht genau zwei abzählbare Modelle haben.

§ 4.4 Fraïssé-Limiten

Def. 4.21: Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur.

- Das Skelett $\mathrm{skel}(\mathcal{M})$ von $\mathcal{M}$ ist die Klasse aller endlich erzeugten $\mathcal{L}$-Strukturen, welche isomorph zu Unterstrukturen von $\mathcal{M}$ sind.
- $\mathcal{M}$ ist K-saturiert, falls $K = \mathrm{skel}(\mathcal{M})$ und falls es für alle $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ in K und alle Einbettungen $f_0 : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$, $f_1 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ eine Einbettung $g_1 : \mathcal{B} \to \mathcal{M}$ gibt, s.d. $f_0 = g_1 \circ f_1$

Satz 4.22: Sei $\mathcal{L}$ abzählbar. Sind $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ abzählbare $\mathcal{L}$-Strukturen, die K-saturiert sind, so sind sie isomorph.

Satz 4.23: Sei L abzählbar und K eine abzählbare Klasse endlich erzeugter L-Strukturen. Dann existiert eine abzählbare, K-saturierte L-Struktur $\mathfrak{U}$ genau dann wenn wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

1. (Vererbung) Gehört $\mathfrak{A}_0$ zu K, dann gehören alle Elemente von $\mathrm{skel}(\mathfrak{A}_0)$ auch zu K.
2. (Gemeinsame Einbettungen) Für alle $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1 \in K$ gibt es $\mathfrak{D} \in K$ mit Einbettungen $g_0 : \mathfrak{B}_0 \to \mathfrak{D}$ und $g_1 : \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{D}$.
3. (Amalgamierung) Für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1 \in K$ mit Einbettungen $f_i : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_i$ gibt es $\mathfrak{D} \in K$ mit Einbettungen $g_i : \mathfrak{B}_i \to \mathfrak{D}$, s.d. $g_0 \circ f_0 = g_1 \circ f_1$.

Sind diese Eigenschaften erfüllt, so ist $\mathfrak{U}$ eindeutig bis auf Isomorphismus und heißt der Fraïssé-Limes von K.