Satz 4.16: Sei T eine abzählbare, vollständige L-Theorie.
Dann sind äquivalent:
1) T ist $\aleph_0$-kategorisch
2) Jedes abzählbare Modell von T ist ω-saturiert.
3) Für jedes n gibt es nur endlich viele Formeln $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ mod T.
4) Für jedes n ist $S_n(T)$ endlich.

Bew.: „$\neg 4) \Rightarrow \neg 1)$"
Ang.: $S_n(T)$ ist unendlich
Dann: Es gibt $p \in S_n(T)$, welcher nicht isoliert (VL 11).
p nicht isoliert $\overset{\text{Satz 4.2}}{\underset{\text{Omitting types}}{\Rightarrow}}$ Gibt ein $\underbrace{\text{Modell}}^{\text{abzählbares}}$ $\mathcal{M} \models T$, das p vermeidet.
Aber da p konsistent, gibt es auch ein abz. Modell $\mathcal{N} \models T$, das p realisiert.
$\Rightarrow \mathcal{N} \not\cong \mathcal{M}$, also nicht $\aleph_0$-kat. □

Kor. 4.16: Sei $\mathcal{A}$ eine L-Struktur und $a_1, \ldots, a_n \in A$. Dann ist $Th(\mathcal{A})$ $\aleph_0$-kategorisch gdw $Th(\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n)$ $\aleph_0$-kategorisch ist.

Bsp. für $\aleph_0$-kat. Theorien:
- DLO, $L = L_{ord} = \{<\}$
$\rightsquigarrow$ Quantorenfreie Formeln in n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ können nur aussagen, in welcher Ordnungsbeziehungen die x_i zueinander stehen
$\rightsquigarrow$ nur endl. viele $\overset{\text{q.f.}}{\text{Formeln}}$
DLO hat QE $\rightsquigarrow$ Ryll-Nardz.

· Zufallsgraph RG ⇝ hat QE

Q'freie Formeln im Zgraph können nur ausdrücken, welche Knoten (Variablen x_i) eine Kante bilden und welche nicht ⇝ RN.

Def 4.17: Eine Theorie T heißt <u>schmal</u>, wenn $S_n(T)$ abzählbar ist für alle $n < \omega$.

Lem 4.18: Eine abzählbare vollständige Theorie T ist schmal gdw sie ein abzählbares ω-saturiertes Modell besitzt.

Bew.: „$\Leftarrow$" Ang., es gibt $M \models T$ abzählbar, ω-sat.

Beh.: Dann ist $S_n(T)$ abzählbar

Für $p \in S_n(T)$ sei

$$M_p = \{ \bar{m} \in M^n \mid \bar{m} \text{ realisiert } p \}$$

i) $M_p \neq \emptyset$

ii) Ist $p \neq q$, dann $M_p \cap M_q = \emptyset$

i) + ii) ⇒ Beh:

$$S_n(T) \to M^n \qquad \text{inj.}$$

$$p \mapsto \bar{m} \in M_p$$

ii) $\bar{m} \in M_p \cap M_q \Rightarrow p \cup q$ ist kons.

$$\underset{\text{kons.}}{\overset{\text{max.}}{\Rightarrow}} p \cup q = p = q$$

i) ω-Saturiertheit.

„⇒" Sei T schmal.

$S_{n+1}(T)$ abzählbar ⇒ für alle $A \subset M$, $M \models T$, $|A| = n$ ist $S_1^M(A)$ abzählbar

Sei $\mathcal{A}_0 \models T$ abzählbar, konstruiere abzählb. elt. Kette

$\mathcal{A}_0 \prec \mathcal{A}_1 \prec \dots$

von abz'baren Modellen von T, s.d. in $\mathcal{A}_{i+1}$ alle Typen über endlichen Teilmengen von $\mathcal{A}_i$ realisiert werden.

⇒ $\mathcal{A} := \bigcup_{i<\omega} \mathcal{A}_i$ ist abz'bar und ω-saturiert.

Wir erhalten so eine Kette wie folgt:

Ang. $\mathcal{A}_i$ ist schon konstruiert. Dann gibt es nach Kor. 2.14 eine elementare Erweiterung $\mathcal{A}_i \prec \tilde{\mathcal{A}}_{i+1}$, in der Typen über $\mathcal{A}_i$ realisiert werden. Insbesondere gibt es dann für jeden Typen p in

$$\tilde{S} := \bigcup_{\substack{A \subset A_i \\ \text{endl.}}} \{p \in S_n^{\mathcal{A}_i}(A)\}$$

ein $\bar{a}_p \in \tilde{A}_{i+1}$, s.d. $\bar{a}_p$ p realisiert.

Für $S := \{\bar{a}_p \mid p \in \tilde{S}\} \subseteq \tilde{A}_{i+1}$ gilt:

$|S| \leq |\tilde{S}| \leq \aleph_0$ (notiere: T schmal)

Löwenheim-Skolem (2.15.1): Finden $\mathcal{A}_{i+1} \prec \tilde{\mathcal{A}}_{i+1}$, welche abz'bar ist und $A_i \cup S$ enthält. $\square$

Lem 4.19: Sei T abzählbar und nicht schmal. Dann hat T überabzählbar viele abzählbare Modelle.

Bew.: $S_n(T)$ überabz'bar für alle n.

Die Beh. folgt aus

1. Jedes abzählbare $\mathfrak{A} \models T$ kann abzählbar viele Typen realisieren.
2. Jedes $p \in S_n(T)$ wird in einem abz'baren Modell von T realisiert. □

Satz 4.20 (Vaught): Eine abzählbare vollständige Theorie kann nicht genau zwei abzählbare Modelle haben.

Bew.: Sei T abz'bar.

- T $\aleph_0$-kat. ✓
- T nicht schmal ✓

Nehme an, T schmal und nicht $\aleph_0$-kat. Zeige: Hat mind. drei abz'bare Modelle.

Da T schmal ist, gibt es abz'bares ω-saturiertes Modell $\mathfrak{A}$.

Da T nicht $\aleph_0$-kat. ist, gibt $\mathfrak{B} \models T$ abz'bar, s.d. $\mathfrak{B} \not\cong \mathfrak{A}$.

Lemma 4.15: $\mathfrak{B}$ nicht ω-saturiert. ($\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$)

$\Rightarrow$ Gibt $p(\bar{x})$ Typ, der nicht in $\mathfrak{B}$ realisiert wird.

Sei $\bar{a}$ die Real. von p in $\mathfrak{A}$ (gibt es, da $\mathfrak{A}$ ω-sat.)

Kor. 4.16 $\Rightarrow$ $\mathrm{Th}(\mathcal{A},\bar{a})$ nicht $\aleph_0$-kat.

$\Rightarrow$ Gibt $(\mathcal{C},\bar{c}) \models \mathrm{Th}(\mathcal{A},\bar{a})$ abz., dass nicht ω-saturiert

$\Rightarrow$ $\mathcal{C} \models T$ und nicht ω-saturiert, also $\mathcal{A} \not\cong \mathcal{C}$.

Aber $\mathcal{C}$ realisiert p (durch $\bar{c}$), also $\mathcal{B} \not\cong \mathcal{C}$. $\square$

Bem.: VL5:

- DLO ist $\aleph_0$-kat., nicht $|\mathbb{R}|$-kat.
- ACF_p nicht $\aleph_0$-kat, aber κ-kategorisch für alle $\kappa > \aleph_0$

Satz (Morley): Ist κ eine überabzählbare Kardinalzahl.
Dann ist eine Theorie T κ-kategorisch gdw T $\aleph_1$-kat. ist.