§ 4.4 Fraïssé-Limiten

Def. 4.21: Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur.

- Das <u>Skelett</u> $\mathrm{skel}(\mathcal{M})$ <u>von $\mathcal{M}$</u> ist die Klasse aller endlich erzeugten $\mathcal{L}$-Strukturen, welche isomorph zu Unterstrukturen von $\mathcal{M}$ sind.
- $\mathcal{M}$ ist K-saturiert, falls $K = \mathrm{skel}(\mathcal{M})$ und falls es für alle $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ in K und alle Einbettungen $f_0 : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$, $f_1 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ eine Einbettung $g_1 : \mathcal{B} \to \mathcal{M}$ gibt, s.d. $f_0 = g_1 \circ f_1$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "f_1"'] & \mathcal{M} \\ \mathcal{B} \arrow[ur, "\exists g_1"'] & \end{tikzcd}$$

Satz 4.22: Sei $\mathcal{L}$ abzählbar. Sind $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ abzählbare $\mathcal{L}$-Strukturen, die K-saturiert sind, so sind sie isomorph.

Satz 4.23: Sei L abzählbar und K eine abzählbare Klasse endlich erzeugter L-Strukturen. Dann existiert eine abzählbare, K-saturierte L-Struktur $\mathfrak{M}$ genau dann wenn wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

1. (Vererbung) Gehört $\mathfrak{A}_0$ zu K, dann gehören alle Elemente von $\mathrm{skel}(\mathfrak{A}_0)$ auch zu K.
2. (Gemeinsame Einbettungen) Für alle $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1 \in K$ gibt es $\mathfrak{D} \in K$ mit Einbettungen $g_0 : \mathfrak{B}_0 \to \mathfrak{D}$ und $g_1 : \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{D}$.
3. (Amalgamierung) Für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1 \in K$ mit Einbettungen $f_i : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_i$ gibt es $\mathfrak{D} \in K$ mit Einbettungen $g_i : \mathfrak{B}_i \to \mathfrak{D}$, s.d. $g_0 \circ f_0 = g_1 \circ f_1$.

Sind diese Eigenschaften erfüllt, so ist $\mathfrak{M}$ eindeutig bis auf Isomorphismus und heißt der Fraïssé-Limes von K.

Lem 4.24: Sind L eine endliche, relationale Sprache und T eine vollständige L-Theorie mit Quantorenelimination, dann ist T $\aleph_0$-kategorisch.

Def 4.25: Eine L-Struktur heißt <u>ω-homogen</u>, falls jede elementare Abbildung $f_0 : A \to M$, $A \subseteq M$ endlich auf jedes $a \in M$ fortgesetzt werden kann, d.h., dass es $b \in M$ gibt, s.d.

$$\tilde{f}_0 : A \cup \{a\} \to f_0(A) \cup \{b\}$$
$$a \mapsto b$$

elementar ist.

Lem. 4.26: Jede ω-saturierte Struktur ist ω-homogen.

Lem. 4.27: Seien L eine endliche, relationale Sprache, T eine vollständige L-Theorie, und M ein unendliches Modell von T. Dann sind äquivalent:

1. T hat Quantorenelimination.
2. Jeder Isomorphismus zwischen endlichen Unterstrukturen ist elementar.
3. Jeder Isomorphismus $f: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen endlichen Unterstrukturen von M kann auf jedes Element $m \in M$ fortgesetzt werden.

Satz 4.28: Seien L eine endliche relationale Sprache und K eine Klasse endlicher L-Strukturen. Falls der Fraïssé-Limes von K existiert, so ist seine Theorie $\aleph_0$-kategorisch und hat Quantorenelimination.