

§ 4.4 Fränsi-Limiten

Def. 4.21: Sei \mathcal{M} eine \mathcal{L} -Struktur.

- Das Skellett $\text{shel}(\mathcal{M})$ von \mathcal{M} ist die Klasse aller endlich erzeugten \mathcal{L} -Strukturen, welche isomorph zu Unterstrukturen von \mathcal{M} sind.
- \mathcal{M} ist K -saturiert, falls $K = \text{shel}(\mathcal{M})$ und falls es für alle A, B in K und alle Einbettungen $f_0: A \rightarrow \mathcal{M}$, $f_1: A \rightarrow B$ eine Einbettung $g_1: B \rightarrow \mathcal{M}$ gibt, s. d. $f_0 = g_1 \circ f_1$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_0} & \mathcal{M} \\ f_1 \downarrow & \nearrow & \\ B & & \exists g_1 \end{array}$$

Satz 4.22: Sei \mathcal{L} abzählbar. Sind \mathcal{M} und \mathcal{N} abzählbare \mathcal{L} -Strukturen, die K -saturiert sind, so sind sie isomorph.

Bew.: Wir konstruieren eine Isomorphie $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ als Vereinigung einer aufsteigenden Folge von Isomorphismen zwischen endl. erz. Unterstrukturen von \mathcal{M} und \mathcal{N}

(vgl. Bew. von Lem 4.15)

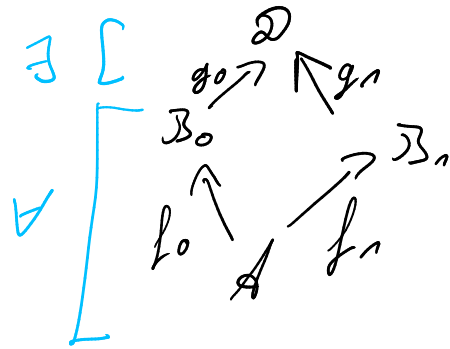
Sei $A \in \text{shel}(\mathcal{M}) = K$, $f_0: A \rightarrow \mathcal{M}$ eine Einbettung
(gilt es, da $K = \text{shel}(\mathcal{N})$)

Sei $a \in \mathcal{M}$. Dann lässt sich f_0 auf $A' = \langle A \cup \{a\} \rangle^{\mathcal{M}}$ fortsetzen, weil \mathcal{N} K -saturiert

$$\begin{array}{ccc} \text{shel}(\mathcal{M}) \ni A & \xrightarrow{f_0} & \mathcal{N} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \text{shel}(\mathcal{M}) \ni A' = \langle A \cup \{a\} \rangle & & \end{array} \quad \text{Dann back-and-forth.}$$

Satz 4.23: Sei \mathcal{L} abzählbar und \mathcal{K} eine abzählbare Klasse endlich erzeugter \mathcal{L} -Strukturen. Dann existiert eine abzählbare, \mathcal{K} -saturierte \mathcal{L} -Struktur \mathcal{M} genau dann wenn wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

1. (Vererbung) Gehört \mathcal{A}_0 zu \mathcal{K} , dann gehören alle Elemente von $\text{shel}(\mathcal{A}_0)$ auch zu \mathcal{K} .
2. (Gemeinsame Einbettungen) Für alle $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1 \in \mathcal{K}$ gibt es $\mathcal{D} \in \mathcal{K}$ mit Einbettungen $g_0: \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{D}$ und $g_1: \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{D}$.
3. (Amalgamierung) Für alle $\mathcal{A}, \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1 \in \mathcal{K}$ mit Einbettungen $f_i: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_i$ gibt es $\mathcal{D} \in \mathcal{K}$ mit Einbettungen $g_i: \mathcal{B}_i \rightarrow \mathcal{D}$, s.d. $g_0 \circ f_0 = g_1 \circ f_1$.



Sind diese Eigenschaften erfüllt, so ist \mathcal{M} eindeutig bis auf Isomorphismus und heißt der Fränsé-Limes von \mathcal{K} .

Bsp.: \mathcal{K} = endlich lineare Ordnungen

Fränsé-Limes: DLO

Bew.: Nehme an, es gibt eine abz., \mathcal{K} -saturierte Struktur \mathcal{M} .
Zeige 1, 2, 3

1) klar

3) Geg. $\mathcal{A}, \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, f_0, f_1$ wie oben

Wir können annehmen, dass $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{M}$ (+ f_0 Inklusion)
und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_1, f_1$ Inkl.

Da M K -separiert ist, gibt es eine Einbettung
 $\tilde{g}_1: \mathbb{B}_1 \rightarrow M$, welche $f_0 = \tilde{g}_1 \circ f_1$ erfüllt

$$\begin{array}{ccc} & \exists \mathbb{B}_0 \subseteq M & \\ & \nearrow \tilde{g}_1 & \\ f_1 \downarrow & & \\ \mathbb{B}_1 & & \end{array}$$

Wähle jetzt als \mathbb{D} eine endl. erz. U 'str. von M , welche
 \mathbb{B}_0 und $\tilde{g}_1(\mathbb{B}_1)$ enthält. Setze $g_0: \mathbb{B}_0 \rightarrow \mathbb{D}$
 Inklusion und $g_1 = \tilde{g}_1$

2) wie 3), nur leichter.

Nehme jetzt an, K erfüllt 1., 2., 3.

Konstruiere M als aufsteigende Kette

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq$$

von Elementen aus K , i. d. g. geb

(*) Sind $A, B \in K$, $A \subseteq B$ und $f: A \rightarrow M_k$ Ein-
 bettung, dann gibt es $j > k$ und eine Einbettung
 $g: B \rightarrow M_j$, die f fortsetzt.

Angenommen, wir haben so eine Kette, dann setze wir

$$M := \bigcup_{i < \omega} M_i.$$

Beh: M ist K -separiert.

Reicht z. z.: $K = \text{shul}(M)$

„ \supseteq “ Jedes $A \in \text{shul}(M)$ ist endl. erzeugt und damit
 in einer M_i enthalten. Aber: $M_i \in K$, K hat Verserbung
 (1.) $\Rightarrow A \in K$.

" \subseteq " Sei $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$. Da $\mathcal{M}_0 \in \mathcal{K}$ und \mathcal{K} hat gem. Einbett. (2.)

\Rightarrow gibt $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$ und $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{B}$ Einbettungen

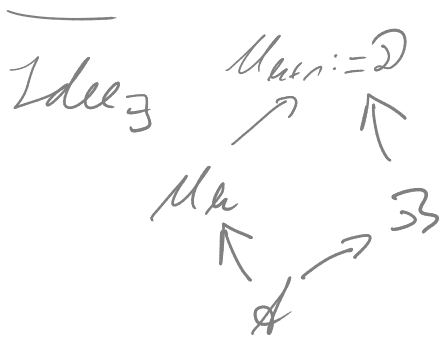
(*) für $\mathcal{M}_0 \hookrightarrow \mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{B}$, ferner $\mathcal{B} \cong \mathcal{B}$

$\exists g: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{M}_j$ Einbettung

$\Rightarrow \mathcal{B} \in \text{shul}(\mathcal{M}_j) \Rightarrow \mathcal{A} \in \text{shul}(\mathcal{M}_j) \Rightarrow \mathcal{A} \in \text{shul}(\mathcal{M})$.

Konstruktion der Kette

$\mathcal{M}_0 \in \mathcal{K}$ beliebig



Sei \mathcal{P} eine Menge von Paaren $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathcal{K}^2$ mit $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$, s. d. \mathcal{P} (bis auf Isomorphie) einen Vertreter jedes solchen Paares enthält. Da $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{K}^2$ ist \mathcal{P} abzählbar.

Sei $\pi: \omega \times \omega \rightarrow \omega$ eine Bijektion mit $\pi((i, j)) \geq i$.

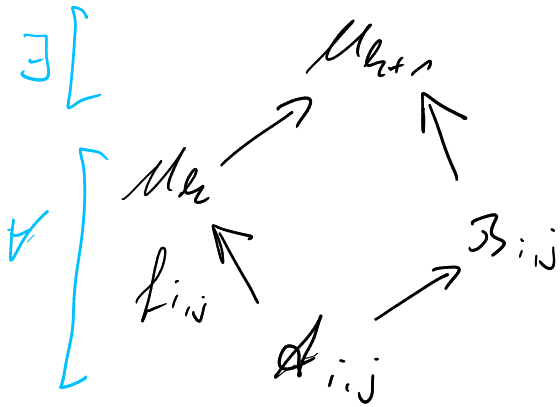
Konstruktion der Kette per Induktion:

Ang. \mathcal{M}_k schon konstruiert. Zähle dann alle Tripel $(f_k, \mathcal{A}_k, \mathcal{B}_k)$ auf, s. d. $(\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_k) \in \mathcal{P}$ und $f_k: \mathcal{A}_k \rightarrow \mathcal{M}_k$ Einbettung.

\rightarrow Erhalte abzählbare Menge $\{(f_{k,i}, \mathcal{A}_{k,i}, \mathcal{B}_{k,i}) \mid i \in \omega\}$

Nehme jetzt $(i, j) \in \omega^2$ s. d. $\pi(i, j) = k$ und def.

M_{k+1} mit Anlagerung (3) via



Eindeutigkeit folgt mit Satz 4.22. □

folgt: endlich, relational Sprache

→ jede endl. Teilmenge schon eine endl. Unterstruktur

Z.B. $L = L_{\text{graph}}$, $L = L_{\text{ord}}$

Zum 4.24, Sind L eine endlich, relationale Sprache und T eine vollständige L -Theorie mit Quantorelimination, dann ist T \aleph_0 -kategorisch.

Bew.: Ist L endl. + relational, so gibt es bis auf Äquivalenz nur endl. Q'freie Formeln $S(x_1, \dots, x_n)$.

T hat QE \Rightarrow das sind alle Formeln mod T

\Rightarrow Typk. Mod. (Satz 4.1(6)) $\Rightarrow \aleph_0$ -kat. □

Def 4.25: Eine L -Struktur heißt ω -homogen, falls jede elementare Abbildung $f_0: A \rightarrow M$, $A \subseteq M$ endlich auf jedes $a \in M$ fortgesetzt werden kann, d.h., dass es $b \in M$ gibt, s.d.

$$\tilde{f}_0: A \cup \{a\} \rightarrow f_0(A) \cup \{b\}$$

$$a \mapsto b$$

elementar ist.

Lemma 4.26: Jede ω -saturierte Struktur ist ω -homogen.

"Bew": Folgt wie in Bew. von Lem. 4.15.

Lemma 4.27: Seien \mathcal{L} eine endlich, relationale Sprache, T eine vollständige \mathcal{L} -Theorie und \mathcal{M} ein unendliches Modell von T . Dann sind äquivalent:

1. T hat Quantorelimination.

2. Jeder Isomorphismus zwischen endlichen Unterstrukturen ist elementar.

3. Jeder Isomorphismus $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ zwischen endlichen Unterstrukturen von \mathcal{M} kann auf jedes Element $m \in \mathcal{M}$ fortgesetzt werden.

Bew.:

2. \Leftarrow 1. Sei $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$ endlich, $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ Iso. Dann ist f , gesehen als partielle Abb. $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ elementar.

"1. \Rightarrow 2." Ang., T hat Q.E. Müssen zeigen: f erhält Gültigkeit von Formeln (in \mathcal{M} !)

$f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ Iso. $\Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi(f(\bar{a}))$

Aber f Q'frei: $\mathcal{B} \models \varphi(\bar{b}) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi(\bar{b})$.

(Lemma 3.5)

"2. \Rightarrow 1." Sei $\bar{a} \in \mathcal{M}^n$ sei

$\text{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \{ \varphi(\bar{x}) \mid \mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}), \varphi(\bar{x}) \text{ Q'frei} \}$

Sei $\text{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \text{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{b})$.

Beh. 1: Dann erfülle \bar{a} in \bar{b} dieselbe einfache Existenzformel.

Bew.: Sei $\varphi(\bar{x}) = \exists y \underbrace{S(\bar{x}, y)}_{Q'f.}$ mit $M \models \varphi(\bar{a})$

Es gilt: $\text{tp}_{M, Q'}(\bar{a}) = \text{tp}_{M, Q'}(\bar{b})$

$$\Rightarrow f: \langle \bar{a} \rangle \rightarrow \langle \bar{b} \rangle$$

$$a_i \mapsto b_i$$

ist ein Iso. zwischen endl. (erz.) Unterstrukturen von M .

2. \Rightarrow elementar

D.h. erhält Gültigkeit von $\exists y S(\bar{x}, y)$, also

$$M \models \exists y S(\bar{a}, y) \Rightarrow M \models \exists y S(\underbrace{f(\bar{a})}_{=\bar{b}}, y)$$

also $M \models \varphi(\bar{b})$

Beh. 2: Jede einfache Q' -formel ist mod T äqu. zu einer Q' -freien Formel.

A b c