§ 4.4 Fraïssé-Limiten

Def. 4.21: Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur.

- Das <u>Skelett</u> $\operatorname{skel}(\mathcal{M})$ <u>von $\mathcal{M}$</u> ist die Klasse aller endlich erzeugten L-Strukturen, welche isomorph zu Unterstrukturen von $\mathcal{M}$ sind.
- $\mathcal{M}$ ist K-saturiert, falls $K = \operatorname{skel}(\mathcal{M})$ und falls es für alle $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ in K und alle Einbettungen $f_0 : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$, $f_1 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ eine Einbettung $g_1 : \mathcal{B} \to \mathcal{M}$ gibt, s.d. $f_0 = g_1 \circ f_1$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "f_1"'] & \mathcal{M} \\
\mathcal{B} \arrow[ur, "\exists g_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Satz 4.22: Sei L abzählbar. Sind $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ abzählbare L-Strukturen, die K-saturiert sind, so sind sie isomorph.

Bew.: Wir konstruieren einen Isomorphismus $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ als Vereinigung einer aufsteigenden Folge von Isomorphismen zwischen endl. erz. Unterstrukturen von $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ (vgl. Bew. von Lem 4.15)

Sei $\mathcal{A} \in \operatorname{skel}(\mathcal{M}) = K$, $f_0 : \mathcal{A} \to \mathcal{N}$ eine Einbettung (gibt es, da $K = \operatorname{skel}(\mathcal{N})$)

Sei $a \in M$. Dann lässt sich f_0 auf $\mathcal{A}' = \langle A \cup \{a\} \rangle^{\mathcal{M}}$ fortsetzen, weil $\mathcal{N}$ K-saturiert.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{skel}(\mathcal{N}) \ni \mathcal{A} \arrow[r, "f_0"] \arrow[d] & \mathcal{N} \\
\operatorname{skel}(\mathcal{N}) \ni \mathcal{A}' = \langle A \cup \{a\} \rangle \arrow[ur, "\exists"'] &
\end{tikzcd}$$

Dann back-and-forth.

∎

Satz 4.23: Sei L abzählbar und K eine abzählbare Klasse endlich erzeugter L-Strukturen. Dann existiert eine abzählbare, K-saturierte L-Struktur $\mathfrak{M}$ genau dann wenn wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

1. (Vererbung) Gehört $\mathfrak{A}_0$ zu K, dann gehören alle Elemente von $\mathrm{skel}(\mathfrak{A}_0)$ auch zu K.
2. (Gemeinsame Einbettungen) Für alle $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1 \in K$ gibt es $\mathfrak{D} \in K$ mit Einbettungen $g_0 : \mathfrak{B}_0 \to \mathfrak{D}$ und $g_1 : \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{D}$.
3. (Amalgamierung) Für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1 \in K$ mit Einbettungen $f_i : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_i$ gibt es $\mathfrak{D} \in K$ mit Einbettungen $g_i : \mathfrak{B}_i \to \mathfrak{D}$, s.d. $g_0 \circ f_0 = g_1 \circ f_1$.

$$\begin{tikzcd}
\exists & & \mathfrak{D} & \\
\forall & \mathfrak{B}_0 \arrow[ur, "g_0"] & & \mathfrak{B}_1 \arrow[ul, "g_1"'] \\
& & \mathfrak{A} \arrow[ul, "f_0"] \arrow[ur, "f_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Sind diese Eigenschaften erfüllt, so ist $\mathfrak{M}$ eindeutig bis auf Isomorphismus und heißt der <u>Fraïssé-Limes</u> von K.

Bsp.: K = endliche lineare Ordnungen

Fraïssé-Limes: DLO

Bew.: Nehme an, es gibt eine abz., K-saturierte Struktur $\mathfrak{M}$.

Zeige 1, 2, 3

1) klar

3) Geg. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, f_0, f_1$ wie oben

Wir können annehmen, dass $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{M}$ ($+ f_0$ Inklusion) und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}_1$, f_1 Inkl.

Da $\mathcal{M}$ K-saturiert ist, gibt es eine Einbettung $\tilde{g}_1 : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{M}$, welche $f_0 = \tilde{g}_1 \circ f_1$ erfüllt

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "f_1"'] & \mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{M} \\ \mathcal{B}_1 \arrow[ur, "\exists \tilde{g}_1"'] & \end{tikzcd}$$

Wähle jetzt als $\mathcal{D}$ eine endl. erz. U'str. von $\mathcal{M}$, welche $\mathcal{B}_0$ und $\tilde{g}_1(\mathcal{B}_1)$ enthält. Setze $g_0 : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{D}$ Inklusion und $g_1 = \tilde{g}_1$

2) wie 3), nur leichter.

Nehme jetzt an, K erfüllt 1., 2., 3.
Konstruiere $\mathcal{M}$ als aufsteigende Kette

$$\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}_1 \subseteq \ldots \subseteq$$

von Elemente aus K, s.d. gilt

(*) Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in K$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $f : A \to \mathcal{M}_k$ Einbettung, dann gibt es $j > k$ und eine Einbettung $g : \mathcal{B} \to \mathcal{M}_j$, die f fortsetzt.

Angenommen, wir haben so eine Kette, dann setze wir $\mathcal{M} := \bigcup_{i < \omega} \mathcal{M}_i$.

Beh. $\mathcal{M}$ ist K-saturiert.
Reicht z.z. : $K = \mathrm{skel}(\mathcal{M})$

„$\supseteq$“ Jedes $\mathcal{A} \in \mathrm{skel}(\mathcal{M})$ ist endl. erzeugt und damit in einem $\mathcal{M}_i$ enthalten. Aber: $\mathcal{M}_i \in K$, K hat Vererbung (1.) $\Rightarrow \mathcal{A} \in K$.

„$\subseteq$" Sei $\mathcal{A} \in K$. Da $M_0 \in K$ und K hat gem. Einbett. (2.)

$\Rightarrow$ gibt $\mathcal{B} \in K$ und $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $M_0 \to \mathcal{B}$ Einbettungen

(*) für $M_0 \hookrightarrow M_0$, $M_0 \subseteq \tilde{\mathcal{B}}$, ferner $\tilde{\mathcal{B}} \cong \mathcal{B}$

$\exists\, g : \tilde{\mathcal{B}} \to M_j$ Einbettung

$\Rightarrow \mathcal{B} \in \mathrm{skel}(M_j) \Rightarrow \mathcal{A} \in \mathrm{skel}(M_j) \Rightarrow \mathcal{A} \in \mathrm{skel}(M)$.

Konstruktion der Kette

$M_0 \in K$ beliebig

Idee

$$\begin{tikzcd}
 & M_{k+1} := \mathcal{D} & \\
M_k \arrow[ur] & & \mathcal{B} \arrow[ul] \\
 & \mathcal{A} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Sei P eine Menge von Paaren $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in K^2$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, s.d. P (bis auf Isomorphie) einen Vertreter jedes solchen Paares enthält. Da $P \subseteq K^2$ ist P abzählbar.

Sei $\pi : \omega \times \omega \to \omega$ eine Bijektion mit $\pi((i,j)) \geq i$.

Konstruktion der Kette per Induktion:

Ang. M_k schon konstruiert. Zähle dann alle Tripel $(f_k, \mathcal{A}_k, \mathcal{B}_k)$ auf, s.d. $(\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_k) \in P$ und $f_k : \mathcal{A}_k \to M_k$ Einbettung.

$\rightsquigarrow$ Erhalte abzählbare Menge $\{(f_{k,j}, \mathcal{A}_{k,j}, \mathcal{B}_{k,j}) \mid j \in \omega\}$

Nehme jetzt $(i,j) \in \omega^2$ s.d. $\pi(i,j) = k$ und def.

M_{n+1} mit Amalgamierung (3) via

$$\begin{tikzcd} \exists & & M_{n+1} & \\ \forall & M_n \arrow[ur] & & B_{i,j} \arrow[ul] \\ & & A_{i,j} \arrow[ul, "f_{i,j}"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Eindeutigkeit folgt mit Satz 4.22. □

Jetzt: endliche, relationale Sprachen

→ jede endl. Teilmenge schon eine endl. Unterstruktur

z.B. $L = L_{graph}$, $L = L_{ord}$

Lem 4.24: Sind L eine endliche, relationale Sprache und T eine vollständige L-Theorie mit Quantorenelimination, dann ist T $\aleph_0$-kategorisch.

Bew.: Ist L endl. + relational, so gibt es bis auf Äquivalenz nur endl. Q'freie Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_n)$.

T hat QE $\rightsquigarrow$ das sind alle Formeln mod T

$\rightsquigarrow$ Ryll-Nardz. (Satz 4.16) $\Rightarrow$ $\aleph_0$-kat. □

Def 4.25: Eine L-Struktur heißt <u>ω-homogen</u>, falls jede elementare Abbildung $f_0 : A \to M$, $A \subseteq M$ endlich auf jedes $a \in M$ fortgesetzt werden kann, d.h., dass es $b \in M$ gibt, s.d.

$$\tilde{f}_0 : A \cup \{a\} \to f_0(A) \cup \{b\}$$
$$a \mapsto b$$

elementar ist.

Lem. 4.26: Jede ω-saturierte Struktur ist ω-homogen.

„Bew": Folgt wie im Bew. von Lem. 4.15.

Lem. 4.27: Seien L eine endliche, relationale Sprache, T eine vollständige L-Theorie und $\mathcal{M}$ ein unendliches Modell von T. Dann sind äquivalent:

1. T hat Quantorenelimination.
2. Jeder Isomorphismus zwischen endlichen Unterstrukturen ist elementar.
3. Jeder Isomorphismus $f: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen endlichen Unterstrukturen von $\mathcal{M}$ kann auf jedes Element $m \in M$ fortgesetzt werden.

Bew.:

2. genauer: $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$ endlich, $f: \underset{\mathcal{M}}{\overset{\cup}{\mathcal{A}}} \to \underset{\mathcal{M}}{\overset{\cup}{\mathcal{B}}}$ Isom. Dann ist f, gesehen als partielle Abbi. $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ elementar.

„1. $\Rightarrow$ 2." Ang., T hat QE. Müssen zeigen: f erhält Gültigkeit von Formeln (in $\mathcal{M}$!)

$f: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Iso. $\Rightarrow$ $\mathcal{A} \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi(f(\bar{a}))$

Aber φ Q'frei : $\mathcal{B} \models \varphi(\bar{b}) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi(\bar{b})$.

(Lemma 3.5)

„2. $\Rightarrow$ 1." Für $\bar{a} \in M^n$ sei

$tp_{qf}(\bar{a}) := \{\varphi(\bar{x}) \mid \mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}),\ \varphi(\bar{x}) \text{ Q'frei}\}$

Sei $tp_{qf}(\bar{a}) = tp_{qf}(\bar{b})$.

Beh. 1: Dann erfüllen $\bar{a}$ und $\bar{b}$ dieselben einfachen Existenzformeln.

Bew.: Sei $\varphi(\bar{x}) = \exists y \underbrace{\psi(\bar{x}, y)}_{\text{Q'fr.}}$ mit $M \models \varphi(\bar{a})$

Es gilt: $tp_{qf}(\bar{a}) = tp_{qf}(\bar{b})$

$$\Rightarrow f : \langle \bar{a} \rangle \to \langle \bar{b} \rangle$$
$$a_i \mapsto b_i$$

ist ein Iso. zwischen endl. (erz.) Unterstrukturen von M.

2. $\Rightarrow$ f elementar

D.h. erhält Gültigkeit von $\exists y \psi(\bar{x}, y)$, also

$$M \models \exists y\, \psi(\bar{a}, y) \Rightarrow M \models \exists y\, \psi(\underbrace{f(\bar{a})}_{=\bar{b}}, y)$$

also $M \models \varphi(\bar{b})$.

Beh. 2: Jede einfache Ex'formel ist mod T äquiv. zu einer Q'freien Formel.

Abc