Lem. 4.27: Seien L eine endliche, relationale Sprache, T eine vollständige L-Theorie und $\mathcal{M}$ ein unendliches Modell von T. Dann sind äquivalent:

1. T hat Quantorenelimination.
2. Jeder Isomorphismus zwischen endlichen Unterstrukturen ist elementar.
3. Jeder Isomorphismus $f: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen endlichen Unterstrukturen von $\mathcal{M}$ kann auf jedes Element $m \in M$ fortgesetzt werden.

Bew.:

„1. ⇒ 2." Vorlesung 13

„2. ⇒ 1." Für $\bar{a} \in M^n$ sei

$$tp_{qf}(\bar{a}) := \{ \varphi(\bar{x}) \mid \mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}) \ , \varphi(\bar{x}) \text{ Q'frei} \}$$

Sei $tp_{qf}(\bar{a}) = tp_{qf}(\bar{b})$.

Beh. 1: Dann erfüllen $\bar{a}$ und $\bar{b}$ dieselben einfachen Existenzformeln.

Bew. VL 13.

Beh. 2: Jede einfache Ex-formel $\psi(\bar{x}) = \exists y \varphi(\bar{x})$ ist mod T äquivalent zu einer Q'freien Formel.

Satz 4.28: Seien L eine endliche relationale Sprache und K eine Klasse endlicher L-Strukturen. Falls der Fraïssé-Limes von K existiert, so ist seine Theorie $\aleph_0$-kategorisch und hat Quantorenelimination.