Lem. 4.27: Seien L eine endliche, relationale Sprache, T eine vollständige L-Theorie und $\mathcal{M}$ ein unendliches Modell von T. Dann sind äquivalent:

1. T hat Quantorenelimination.
2. Jeder Isomorphismus zwischen endlichen Unterstrukturen ist elementar.
3. Jeder Isomorphismus $f: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen endlichen Unterstrukturen von $\mathcal{M}$ kann auf jedes Element $m \in M$ fortgesetzt werden.

Bew.:

„1. ⇒ 2." Vorlesung 13

„2. ⇒ 1." Für $\bar{a} \in M^n$ sei

$$tp_{qf}(\bar{a}) := \{ \varphi(\bar{x}) \mid \mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}),\ \varphi(\bar{x})\ Q'frei \}$$

Sei $tp_{qf}(\bar{a}) = tp_{qf}(\bar{b})$.

Beh. 1: Dann erfüllen $\bar{a}$ und $\bar{b}$ dieselben einfachen Existenzformeln.

Bew. VL 13.

Beh. 2: Jede einfache Ex formel $\psi(\bar{x}) = \exists y\, \varphi(\bar{x})$ ist mod T äquivalent zu einer Q'freien Formel.

Bew.: Da L relational, endl., gibt es für allen nur endl. viele Q'fr. L-Formeln in n Variablen (bis auf Äquiv.)

$\Rightarrow$ nur endl. viele Q'fr. n-Typen

Seien $r_1(\bar{x}), \ldots, r_{k-1}(\bar{x})$ die Q'fr. Typen aller Tupel in $\mathcal{M}$, die $\psi(\bar{x})$ erfüllen.

Dann gilt:

$$T \vdash \forall \bar{x} \left(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \bigvee_{i \leq k} \underbrace{\bigwedge_{\psi(\bar{x}) \in r_i(\bar{x})} \psi(\bar{x})}_{\text{endl. viele}} \right)$$

QE folgt aus Bed. 2 mit Lem 3.20

„1. ∧ 2. ⇒ 3."

1. + Lem 4.24 ⇒ T ist $\aleph_0$-kat.

Satz 4.16 ⇒ jedes abzählbare Modell ist ω-saturiert

Lem. 4.26 ⇒ jedes " " " ω-homogen

Sei jetzt $f: A \to B$ Isom. zwischen endl. U'str. von M, $m \in M$.

2. ⇒ f ist elementar

ω-homogen ⇒ kann auf m fortgesetzt werden

„3. ⇒ 2." Übung. □

Satz 4.28: Seien L eine endliche relationale Sprache und K eine Klasse endlicher L-Strukturen. Falls der Fraïssé-Limes von K existiert, so ist seine Theorie $\aleph_0$-kategorisch und hat Quantorenelimination.

Bew.: Sei $\mathfrak{M}$ der Fraïssé-Limes von K. Dann ist 3. von Lem 4.27 erfüllt, denn:

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \overset{\subseteq \mathfrak{M}}{\in} \mathrm{skel}(M) = K$$

$$f_0 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \text{ Iso.} \qquad m \in M$$

$$\rightsquigarrow \mathfrak{A} \cup \{m\} \in \mathrm{skel}(M) = K$$

$\mathfrak{M}$ ist K-saturiert

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "f_1"'] & \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M} \\
\mathfrak{A} \cup \{m\} \arrow[ur, "\exists g_1"'] &
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ f_0 lässt sich durch g_1 fortsetzen.

Lem 4.27 $\Rightarrow$ T hat QE

$\aleph_0$-Kat. folgt mit QE aus Lem 4.24 (Ryll-Nard.) $\square$