§1 Grundlagen

§1.1 Sprachen, Strukturen, Homomorphismen

Def 1.1:

- Eine <u>Sprache</u> L ist eine Menge von Konstanten, Funktionssymbolen und Relationssymbolen.
- Eine <u>L-Struktur</u> ist ein Paar $\mathcal{A} = (A, (Z^{\mathcal{A}})_{Z \in L})$, wobei A eine nicht leere Menge ist und
  - $Z^{\mathcal{A}} \in A$, falls Z eine Konstante;
  - $Z^{\mathcal{A}} : A^n \to A$, falls Z ein n-stelliges Funktionssymbol;
  - $Z^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$, falls Z ein n-stelliges Relationssymbol ist.

  A heißt das <u>Universum</u> von $\mathcal{A}$ und Z die <u>$\mathcal{A}$-Interpretation von Z</u>.

- Die <u>Kardinalität einer L-Struktur</u> $\mathcal{A}$ ist die Kardinalität ihres Universums $|\mathcal{A}| = |A|$.

Def 1.2: Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ L-Strukturen

- Eine Abbildung $h: A \to B$ ist ein <u>Homomorphismus</u> falls für alle $a_1, \dots, a_n \in A$ gilt
  - $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$ für alle Konstanten $c \in L$
  - $h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$ für alle n-stelligen Funktionssymbole $f \in L$
  - $R^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow R^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$ für alle n-stelligen Relationssymbole $R \in L$.

  Wir schreiben dann $h: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

- Falls h zusätzlich injektiv ist und
  $R^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow R^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$,

heißt h (isomorphe) <u>Einbettung</u>.

- Eine surjektive Einbettung heißt <u>Isomorphismus</u>. Wir schreiben dann $h: \mathcal{A} \xrightarrow{\cong} \mathcal{B}$ und sagen, dass $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ <u>isomorph</u> sind, $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.
- Ein <u>Automorphismus</u> ist ein Isomorphismus $\mathcal{A} \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}$. Die Menge $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ aller Automorphismen von $\mathcal{A}$ bildet eine Gruppe unter Komposition.
- $\mathcal{A}$ ist eine <u>Unterstruktur</u> von $\mathcal{B}$ falls $A \subseteq B$ und die Inklusionsabbildung eine Einbettung von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist. Wir schreiben dann $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.
  $\mathcal{B}$ ist eine <u>Erweiterung</u> von $\mathcal{A}$ falls $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

Bem 1.3: Ist $\mathcal{B}$ eine L-Struktur und $B' \subseteq B$, dann ist B' das Universum einer (eindeutigen) Unterstruktur $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ gdw B' alle Konstanten $c^{\mathcal{B}}$ enthält und abgeschlossen unter allen Operationen $f^{\mathcal{B}}$ ist.
Insbesondere ist für jeden Homomorphismus $h: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ das Bild $h(A)$ Universum einer Unterstruktur von $\mathcal{B}$.

Def 1.4: Sei $\mathcal{B}$ eine L-Struktur und $\emptyset \neq S \subseteq B$. Dann gibt es eine kleinste Unterstruktur $\mathcal{A} = \langle S \rangle^{\mathcal{B}}$, welche S enthält.
Wir sagen, dass $\mathcal{A}$ von S erzeugt ist.
Ist S endlich, so heißt $\mathcal{A}$ endlich erzeugt.

Lem 1.5: Falls $\mathcal{A}$ von S erzeugt ist, dann ist für jede L-Struktur $\mathcal{B}$ jeder Homomorphismus $h: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ durch seine Werte auf S bestimmt.

Def 1.6.

- Eine Menge I mit einer zweistelligen Relation $\leq$ heißt partielle Ordnung, falls für alle $i, j, k \in I$ gilt:
  - $i \leq i$
  - $i \leq j$ und $j \leq i \Rightarrow i = j$
  - $i \leq j$ und $j \leq k \Rightarrow i \leq k$
- Eine partielle Ordnung $(I, \leq)$ heißt gerichtet falls es für alle $i, j \in I$ ein $k \in I$ gibt, sodass $i \leq k$ und $j \leq k$.
- Sei $(I, \leq)$ eine gerichtete partielle Ordnung. Eine Familie $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ von L-Strukturen heißt gerichtet falls

$$i \leq j \Rightarrow \mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{A}_j.$$

Lem. 1.7: Sei $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine gerichtete Familie von L-Strukturen. Dann ist $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ das Universum einer eindeutigen L-Struktur $\mathcal{A} := \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$, welche eine Erweiterung aller $\mathcal{A}_i$ ist.