§1 Grundlagen

§1.1 Sprachen, Strukturen, Homomorphismen

Def 1.1:

- Eine <u>Sprache</u> $\mathcal{L}$ ist eine Menge von Konstanten, Funktionssymbolen und Relationssymbolen.
- Eine <u>$\mathcal{L}$-Struktur</u> ist ein Paar $\mathcal{A} = (A, (Z^{\mathcal{A}})_{Z \in \mathcal{L}})$, wobei A eine nicht leere Menge ist und
  - $Z^{\mathcal{A}} \in A$, falls Z eine Konstante;
  - $Z^{\mathcal{A}} : A^n \to A$, falls Z ein n-stelliges Funktionssymbol;
  - $Z^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$, falls Z ein n-stelliges Relationssymbol ist.

  A heißt das <u>Universum</u> von $\mathcal{A}$ und Z die <u>$\mathcal{A}$-Interpretation von $\mathcal{L}$</u>

- Die <u>Kardinalität einer $\mathcal{L}$-Struktur</u> $\mathcal{A}$ ist die Kardinalität ihres Universums $|\mathcal{A}| = |A|$.

Bsp.:

- $\mathcal{L}_{grp} = \{\underline{e}, \circ, {}^{-1}\}$

  Konst (für $\underline{e}$)

  2-stell. Fktsymbol (für $\circ$)

  1-stelliges Fktsymbol (für ${}^{-1}$)

  $\mathcal{L}_{grp}$-Struktur ist eine Gruppe z.B. „$\mathcal{A} = GL_n(\mathbb{R})$"

  $\rightsquigarrow A = \{$invertierbare $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{R}\}$

  $\underline{e}^{GL_n\mathbb{R}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{n} \in GL_n\mathbb{R}$ | $\circ^{GL_n\mathbb{R}} : A \times A \to A$, $(M, N) \mapsto M \cdot N$

$-^{-1\,Gl_n\mathbb{R}}: A \to A$

$\quad M \mapsto M^{-1}$

- $\mathcal{L}_{ring} = \{\underline{0}, \underline{1}, +, -, \cdot\}$

- $\mathcal{L}_{ord} = \{<\}$ ($<$: 2-stellige Relation)

$\mathcal{L}_{ord}$-Strukturen $\hat{=}$ Geordnete Menge z.B. „$(\mathbb{R}, <)$"

$A = \{$reelle Zahlen$\}$

$<^{\mathbb{R}} = \{(a,b) \in A^2 \mid a < b\}$

Def 1.2: Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ $\mathcal{L}$-Strukturen

- Eine Abbildung $h: A \to B$ ist ein Homomorphismus falls für alle $a_1, \dots, a_n \in A$ gilt
  - $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$ für alle Konstanten $c \in \mathcal{L}$
  - $h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$ für alle n-stelligen Funktionssymbole $f \in \mathcal{L}$
  - $R^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow R^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$ für alle n-stelligen Relationssymbole $R \in \mathcal{L}$.

    d.h. $(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathcal{A}}$ $\quad (<^{\mathbb{R}}(-1,1))$

  Wir schreiben dann $h: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

- Falls h zusätzlich injektiv ist und
  $R^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow R^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$,

heißt h (isomorphe) Einbettung.

- Eine surjektive Einbettung heißt Isomorphismus. Wir schreiben dann $h : \mathcal{A} \xrightarrow{\cong} \mathcal{B}$ und sagen, dass $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ isomorph sind, $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.
- Ein Automorphismus ist ein Isomorphismus $\mathcal{A} \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}$. Die Menge $Aut(\mathcal{A})$ aller Automorphismen von $\mathcal{A}$ bildet eine Gruppe unter Komposition.
- $\mathcal{A}$ ist eine Unterstruktur von $\mathcal{B}$ falls $A \subseteq B$ und die Inklusionsabbildung eine Einbettung von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist. Wir schreiben dann $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.
  $\mathcal{B}$ ist eine Erweiterung von $\mathcal{A}$ falls $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

Bem 1.3: Ist $\mathcal{B}$ eine L-Struktur und $B' \subseteq B$, dann ist B' das Universum einer (eindeutigen) Unterstruktur $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ gdw B' alle Konstanten $c^{\mathcal{B}}$ enthält und abgeschlossen unter allen Operationen $f^{\mathcal{B}}$ ist.
Insbesondere ist für jeden Homomorphismus $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ das Bild $h(A)$ Universum einer Unterstruktur von $\mathcal{B}$.

Def 1.4: Sei $\mathfrak{B}$ eine L-Struktur und $\emptyset \neq S \subseteq B$. Dann gibt es eine kleinste Unterstruktur $\mathfrak{A} = \langle S \rangle^{\mathfrak{B}}$, welche S enthält.
Wir sagen, dass $\mathfrak{A}$ von S erzeugt ist.
Ist S endlich, so heißt $\mathfrak{A}$ endlich erzeugt.

Lem 1.5: Falls $\mathfrak{A}$ von S erzeugt ist, dann ist für jede L-Struktur $\mathfrak{B}$ jeder Homomorphismus $h: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ durch seine Werte auf S bestimmt.

Bew.: Sei $h': \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ weiterer Homomorphismus. Dann ist

$C = \{ a \mid h(a) = h'(a) \}$

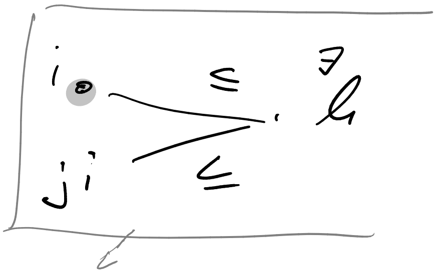
entweder leer oder eine Unterstruktur von $\mathfrak{A}$.

Falls $h'|_S = h|_S$, dann gilt:

$\emptyset \neq S \subseteq C$, also $C = A$ $\square$

Def 1.6.

- Eine Menge I mit einer zweistelligen Relation $\leq$ heißt <u>partielle Ordnung</u>, falls für alle $i, j, k \in I$ gilt:



  - $i \leq i$
  - $i \leq j$ und $j \leq i \Rightarrow i = j$
  - $i \leq j$ und $j \leq k \Rightarrow i \leq k$

- Eine partielle Ordnung $(I, \leq)$ heißt <u>gerichtet</u> falls es für alle $i, j \in I$ ein $k \in I$ gibt, sodass $i \leq k$ und $j \leq k$.
- Sei $(I, \leq)$ eine gerichtete partielle Ordnung. Eine Familie $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ von L-Strukturen heißt <u>gerichtet</u> falls

$$i \leq j \Rightarrow \mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{A}_j.$$

Lem. 1.7: Sei $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine gerichtete Familie von L-Strukturen. Dann ist $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ das Universum einer eindeutigen L-Struktur $\mathcal{A} := \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$, welche eine Erweiterung aller $\mathcal{A}_i$ ist.

Bew.:

$$R^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow R^{\mathcal{A}_k}(a_1, \ldots, a_n), \text{ s. d.}$$

$$a_i \in A_k \ \forall i \quad \boxed{\text{Abc}}$$