§ 1.2 Terme und Formeln

Def 1.8: Sei L eine Sprache.

- Ein <u>L-Term</u> ist eine Folge von Konstanten und Funktionssymbolen aus L sowie Variablen $v_0, v_1, \ldots$, die nach den folgenden Regeln aufgebaut ist:
  1. Jede Variable v_i und jede Konstante c ist ein L-Term.
  2. Ist $f \in L$ eine n-stellige Funktion und sind $t_1, \ldots, t_n$ L-Terme, dann ist $f\,t_1 \ldots t_n$ ein L-Term.
- Die Anzahl der Vorkommen von Funktionssymbolen ist die <u>Komplexität</u> eines Terms.

Def 1.9: Sei t ein L-Term, $\mathcal{A}$ eine L-Struktur und $\vec{b} = (b_0, b_1, \ldots)$ eine Folge von Elementen aus A. Wir definieren die <u>Interpretation</u> $t^{\mathcal{A}}[\vec{b}] \in A$ durch

$$v_i^{\mathcal{A}}[\vec{b}] = b_i$$

$$c^{\mathcal{A}}[\vec{b}] = c^{\mathcal{A}}$$

$$f\,t_1 \ldots t_n^{\mathcal{A}}[\vec{b}] = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[\vec{b}], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[\vec{b}])$$

Wir nennen $\vec{b}$ eine <u>Zuweisung</u> der Variablen $v_0, v_1, \ldots$.

Lemma 1.10: Die Interpretation $t^{\mathcal{A}}[\vec{b}]$ ist nur von b_i abhängig wenn v_i in t vorkommt.

Sind $x_1, \dots, x_n \in \{v_0, v_1, \dots\}$ paarweise verschieden und tauchen keine anderen Variablen in t auf, dann schreiben wir auch

$$t = t(x_1, \dots, x_n).$$

Ist $\vec{b}$ eine Belegung, welche x_i das Elt. $a_i \in A$ zuweist, so schreiben wir

$$t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n] := t^{\mathcal{A}}[\vec{b}].$$

Sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme, so können wir diese für die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ einsetzen. Das Resultat ist ein Term, den wir als $t(t_1, \ldots, t_n)$ schreiben.

Lemma 1.11:
$$t(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{A}}[\vec{b}] = t^{\mathcal{A}}[t_1^{\mathcal{A}}[\vec{b}], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[\vec{b}]].$$

Lemma 1.12: Sei $h: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Homomorphismus und $t(x_1, \ldots, x_n)$ ein Term. Dann gilt für alle $a_1, \ldots, a_n \in A$:
$$t^{\mathcal{B}}[h(a_1), \ldots, h(a_n)] = h(t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n]).$$

Lem 1.13: Sei $\mathcal{A}$ eine L-Struktur und $S \subseteq A$. Dann gilt:
$$\langle S \rangle^{\mathcal{A}} = \{ t^{\mathcal{A}}[s_1, \ldots, s_n] \mid t(x_1, \ldots, x_n) \ L\text{-Term}, s_1, \ldots, s_n \in S \}$$

Kor 1.14: $|\langle S\rangle^{\mathcal{A}}| \leq \max(|S|, |L|, \aleph_0)$.

Def 1.15: Sei L eine Sprache.

- Eine <u>L-Formel</u> ist
  1. $t_1 \doteq t_2$, wobei t_1, t_2 L-Terme sind;
  2. $R t_1 \dots t_n$, wobei $R \in L$ ein n-stelliges Relationssymbol und $t_1, \dots, t_n$ L-Terme sind;
  3. $\neg \varphi$, wobei φ eine L-Formel ist;
  4. $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, wobei φ_1, φ_2 L-Formeln sind;
  5. $\exists x \varphi$, wobei φ eine L-Formel und x eine Variable sind.

- L-Formel wie in 1. oder 2. heißen <u>atomar</u>.
- Die <u>Komplexität</u> einer Formel ist die Anzahl von Vorkommen von $\neg$, $\exists$ und $\wedge$.

Konvention: Wir nutzen folgende Abkürzungen für L-Formeln:

- $(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \neg(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2)$
- $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) = \neg(\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2)$
- $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2) = ((\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \rightarrow \varphi_1))$
- $\forall x \varphi \quad = \neg \exists x \neg \varphi$
- $\exists x_1 \dots x_n = \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n$
- $\forall x_1 \dots x_n = \forall x_1 \dots \forall x_n$
- Fügen Klammern hinzu oder lassen sie weg, falls hilfreich / nicht nötig

Def 1.16: Sei $\mathcal{A}$ eine L-Struktur, φ eine L-Formel und $\vec{b}$ eine Belegung. Wir definieren die Relation

$$\mathcal{A} \models \varphi(\vec{b})$$

rekursiv wie folgt:

- $\mathcal{A} \models t_1 = t_2 [\vec{b}] \Leftrightarrow t_1^{\mathcal{A}}[\vec{b}] = t_2^{\mathcal{A}}[\vec{b}]$
- $\mathcal{A} \models R t_1 \dots t_n [\vec{b}] \Leftrightarrow R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[\vec{b}], \dots, t_n^{\mathcal{A}}[\vec{b}])$
- $\mathcal{A} \models \neg\varphi[\vec{b}] \quad \Leftrightarrow \mathcal{A} \not\models \varphi[\vec{b}]$

- $\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)[\vec{b}] \iff \mathfrak{A} \models \varphi_1[\vec{b}]$ und $\mathfrak{A} \models \varphi_2[\vec{b}]$
- $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi[\vec{b}] \iff$ Es gibt $a \in A$ s.d. $\mathfrak{A} \models \varphi[(b_0, \ldots, b_{i-1}, a, b_{i+1}, \ldots)]$, für $x = v_i$.

Falls $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{b}]$ gilt sagen wir „φ gilt in $\mathfrak{A}$ für $\vec{b}$" oder „$\vec{b}$ erfüllt φ (in $\mathfrak{A}$)".

Def 1.17: Sei x eine Variable und φ eine Formel

- x ist <u>frei</u> in $t_1 \doteq t_2 \iff x$ kommt in t_1 oder t_2 vor
- x " " " $Rt_1 \ldots t_n \iff x$ " " einem der t_i vor
- x " " " $\neg\psi \iff x$ ist frei in ψ
- x " " " $(\psi_1 \wedge \psi_2) \iff x$ " " " ψ_1 oder ψ_2
- x " " " $\exists y \psi \iff x \neq y$ und x ist frei in ψ.

Kommt x in φ vor und ist nicht frei, so ist x <u>gebunden</u>.

Lem 1.18: Falls $\vec{b}$ und $\vec{c}$ auf allen Variablen übereinstimmen, die frei in φ sind, gilt

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{b}] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{c}].$$

Def 1.19: Sei $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ eine $\mathcal{L}$-Formel und $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur

- Die Menge
$$\varphi(\mathcal{A}) := \{\bar{a} \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]\} \subseteq A^n$$
heißt Realisierung von φ.
- Eine Teilmenge $S \subseteq A^n$ heißt 0-definierbar falls $S = \varphi(\mathcal{A})$ für eine Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$.

- Ist $B \subseteq A$, dann erhalten wir eine neue Sprache $\mathcal{L}(B) = \mathcal{L} \cup B$, indem wir jedes Element aus B als neue Konstante hinzufügen. $\mathcal{A}$ ist dann auf offensichtliche Weise auch eine $\mathcal{L}(B)$-Struktur, die wir mit $\mathcal{A}_B = (\mathcal{A}, b)_{b \in B}$ bezeichnen.
- Sei $B \subseteq A$. Eine Teilmenge $S \subseteq A^n$ heißt <u>B-definierbar</u> falls $S = \varphi(\mathcal{A})$ für eine $\mathcal{L}(B)$-Formel $\varphi(x)$.
- $S \subseteq A^n$ ist <u>definierbar</u> wenn es B-definierbar für ein (beliebiges) $B \subseteq A$ ist.

- **Zwei Formeln heißen äquivalent**, wenn sie in jeder Struktur dieselben Mengen definieren.