§1.2 Terme und Formeln

Def 1.8: Sei L eine Sprache.

- Ein <u>L-Term</u> ist eine Folge von Konstanten und Funktionssymbolen aus L sowie Variablen $\underbrace{v_0, v_1, \ldots}_{\text{Symbole}}$, die nach den folgenden Regeln aufgebaut ist:
  1. Jede Variable v_i und jede Konstante c ist ein L-Term.
  2. Ist $f \in L$ eine n-stellige Funktion und sind $t_1, \ldots, t_n$ L-Terme, dann ist $f t_1 \ldots t_n$ ein L-Term.
- Die Anzahl der Vorkommen von Funktionssymbolen ist die <u>Komplexität</u> eines Terms.

Bem.: $f t_1 \ldots t_n = f(t_1, \ldots, t_n)$

$$(x+y)\cdot(z+w) = \cdot +xy +zw$$

Def 1.9: Sei t ein L-Term, $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur und $\vec{b} = (b_0, b_1, \ldots)$ eine Folge von Elementen aus A. Wir definieren die <u>Interpretation</u> $t^{\mathfrak{A}}[\vec{b}] \in A$ durch

$$v_i^{\mathfrak{A}}[\vec{b}] = b_i$$
$$c^{\mathfrak{A}}[\vec{b}] = c^{\mathfrak{A}}$$
$$f t_1 \ldots t_n^{\mathfrak{A}}[\vec{b}] = f^{\mathfrak{A}}\big(\overset{A}{\overset{\in}{t_1^{\mathfrak{A}}[\vec{b}]}}, \ldots, \overset{A}{\overset{\in}{t_n^{\mathfrak{A}}[\vec{b}]}}\big)$$

Wir nennen $\vec{b}$ eine <u>Zuweisung</u> der Variablen $v_0, v_1, \ldots$.

Bsp.: $L = L_{ring}$

Beh.: $\{L\text{-Terme}\} \subseteq \{\text{Polynome in } \mathbb{Z}[x_0, \ldots]\}$

Bew.: Induktion über Komplexität

Variable $x_i \in \mathbb{Z}[x_0, \ldots]$

$\underline{0} \in \mathbb{Z}[x_0, \ldots]$

$\underline{1} \in \mathbb{Z}[x_0 \ldots]$

$p, q \in \mathbb{Z}[x_0, \ldots]$ ⇒ dann $p+q \in \mathbb{Z}[x_0, \ldots]$

$p \cdot q \in \mathbb{Z}[x_0, \ldots]$

$-p \in \mathbb{Z}[x_0 \ldots]$ □

$$\mathfrak{A} = \mathbb{Z}, \quad t = (x_0 + x_1) \cdot (x_2 + x_3), \quad \bar{b} = (\overset{b_0}{3}, \overset{b_1}{2}, \overset{b_2}{-5}, \overset{b_3}{0}, \ldots)$$

$$t^{\mathfrak{A}}[\bar{b}] = (3 +^{\mathfrak{A}} 2) \cdot (-5 + 0)$$
$$= 5 \cdot (-5) = -25 \in A$$

Lemma 1.10: Die Interpretation $t^{\mathfrak{A}}[\bar{b}]$ ist nur von b_i abhängig wenn v_i in t vorkommt.

Sind $x_1, \ldots, x_n \in \{v_0, v_1, \ldots\}$ paarweise verschieden und tauchen keine anderen Variablen in t auf, dann schreiben wir auch

$t = t(x_1, \ldots, x_n)$.

Ist $\bar{b}$ eine Belegung, welche x_i das Elt. $a_i \in A$ zuweist, so schreiben wir

$t^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n] := t^{\mathfrak{A}}[\bar{b}]$.

Sind $t_1, \dots, t_n$ Terme, so können wir diese für die Variablen $x_1, \dots, x_n$ einsetzen. Das Resultat ist ein Term, den wir als $t(t_1, \dots, t_n)$ schreiben.

$p(x) = x^2 \rightsquigarrow p(x_1^2 + x_2^2) = (x_1^2 + x_2^2)^2 = x_1^4 + 2x_1^2 x_2^2 + x_2^4$

$x_1 = 5$, $x_2 = 7$

$5^4 + 2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 + 7^4 = (5^2 + 7^2)^2$

Lemma 1.11:

$$t(t_1, \dots, t_n)^{\mathcal{A}}[\vec{b}] = t^{\mathcal{A}}[t_1^{\mathcal{A}}[\vec{b}], \dots, t_n^{\mathcal{A}}[\vec{b}]].$$

Lemma 1.12: Sei $h: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Homomorphismus und $t(x_1, \dots, x_n)$ ein Term. Dann gilt für alle $a_1, \dots, a_n \in A$:

$$t^{\mathcal{B}}[\underbrace{h(a_1)}_{\in B}, \dots, \underbrace{h(a_n)}_{\in B}] = \underbrace{h(\underbrace{t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n]}_{\in A})}_{\in B}.$$

Lem 1.13: Sei $\mathcal{A}$ eine L-Struktur und $S \subseteq A$. Dann gilt:

$$\langle S \rangle^{\mathcal{A}} = \{ t^{\mathcal{A}}[s_1, \dots, s_n] \mid t(x_1, \dots, x_n) \text{ } L\text{-Term}, s_1, \dots, s_n \in S \}$$

z.B.: $L = L_{grp}$, $\mathcal{A} = G$ Gruppe, $S \subseteq G$

$$\langle S \rangle^G = \{ s_{i_1}^{\pm 1} s_{i_2}^{\pm 1} \cdots s_{i_k}^{\pm 1} \mid s_{i_j} \in S \}$$

Bew.: Wir können annehmen, dass $S \neq \emptyset$ oder L enthält eine Konstante (sonst sind beide Seiten leer).

„$\supseteq$" Lem 1.11 $\Rightarrow$ das Universum einer Unterstruktur abgeschlossen ist unter Interpretation von Termen $t^{\mathcal{A}}[\dots]$

„$\subseteq$" Beh.: Die rechte Seite ist abg. unter allen Operationen $f^{\mathcal{A}}$ und enthält alle Konstanten $c^{\mathcal{A}}$.

Beh. + Bem 1.3 $\Rightarrow$ rechte Seite ist eine Unterstruktur. □

Kor 1.14: $|\langle S\rangle^{\mathcal{A}}| \le \max(|S|, |L|, \aleph_0)$.

$\langle\{1\}\rangle^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$

Bew.: Es gibt höchstens $\max(|L|, \aleph_0)$ viele L-Terme.

und für jeden Term t höchstens $\max(|S|, \aleph_0)$ viele Zuordnungen von Elementen aus S für die Variablen in t. $\square$

L-Formeln: Symbolfolgen aus Zeichen:

- L
- Variablen
- $\doteq$
- $\neg$
- $\wedge$
- $\exists$

Def 1.15: Sei L eine Sprache.

· Eine <u>L-Formel</u> ist

1. $t_1 \doteq t_2$, wobei t_1, t_2 L-Terme sind;
2. $Rt_1 \dots t_n$, wobei $R \in L$ ein n-stelliges Relationssymbol und $t_1, \dots, t_n$ L-Terme sind;
3. $\neg\varphi$, wobei φ eine L-Formel ist;
4. $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, wobei φ_1, φ_2 L-Formeln sind;
5. $\exists x \varphi$, wobei φ eine L-Formel und x eine Variable sind.

· L-Formeln wie in 1. oder 2. heißen <u>atomar</u>.

· Die <u>Komplexität</u> einer Formel ist die Anzahl von Vorkommen von $\neg$, $\exists$ und $\wedge$.

Konvention: Wir nutzen folgende Abkürzungen für L-Formeln:

- $(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \neg(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2)$
- $(\varphi_1 \to \varphi_2) = \neg(\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2)$
- $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) = ((\varphi_1 \to \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \to \varphi_1))$
- $\forall x \varphi \quad = \neg \exists x \neg \varphi$
- $\exists x_1 \ldots x_n = \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n$
- $\forall x_1 \ldots x_n = \forall x_1 \ldots \forall x_n$
- Füge Klammern hinzu oder lasse sie weg, falls hilfreich/nicht nötig

(z.B.): $\neg\varphi_1 \wedge \varphi_2 \to \varphi_3 = ((\neg\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to \varphi_3)$

$\neg \rightsquigarrow \exists, \forall \rightsquigarrow \wedge \rightsquigarrow \vee \rightsquigarrow \leftrightarrow, \to$ |

Def 1.16: Sei $\mathcal{A}$ eine L-Struktur, φ eine L-Formel und $\vec{b}$ eine Belegung. Wir definieren die Relation

$$\mathcal{A} \models \varphi(\vec{b})$$

rekursiv wie folgt:

- $\mathcal{A} \models t_1 \doteq t_2 [\vec{b}] \iff \overset{A}{t_1^{\mathcal{A}}[\vec{b}]} = \overset{A}{t_2^{\mathcal{A}}[\vec{b}]}$
- $\mathcal{A} \models R t_1 \ldots t_n [\vec{b}] \iff R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[\vec{b}], \ldots, \underbrace{t_n^{\mathcal{A}}[\vec{b}]}_{\in A})$
- $\mathcal{A} \models \neg\varphi[\vec{b}] \iff \mathcal{A} \not\models \varphi[\vec{b}]$
- $\mathcal{A} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)[\vec{b}] \iff \mathcal{A} \models \varphi_1[\vec{b}]$ und $\mathcal{A} \models \varphi_2[\vec{b}]$
- $\mathcal{A} \models \exists x \varphi[\vec{b}] \iff$ Es gibt $a \in A$ s.d. $\mathcal{A} \models \varphi[(b_0, \ldots, b_{i-1}, \overset{i\text{-te}}{a}, b_{i+1}, \ldots)]$, für $x = v_i$.

Falls $\mathcal{A} \models \varphi[\vec{b}]$ gilt sagen wir „φ gilt in $\mathcal{A}$ für $\vec{b}$" oder „$\vec{b}$ erfüllt φ (in $\mathcal{A}$)".

Bsp.: $L = L_{ring}$, $\varphi = [\exists x((x^2 \doteq \underline{0}) \land (\neg x \doteq \underline{0}))]$

Dann: $\mathbb{R} \not\models \varphi$

$Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \models \varphi$

$\rightsquigarrow$ φ hat keine „freien Variablen", also keine die nicht durch $\exists x$ gebunden sind.

Def 1.17: Sei x eine Variable und φ eine Formel

- x ist <u>frei</u> in $t_1 \doteq t_2$ $\iff$ x kommt in t_1 oder t_2 vor
- x " " " $R t_1 \ldots t_n$ $\iff$ x " " einem der t_i vor
- x " " " $\neg\psi$ $\iff$ x ist frei in ψ
- x " " " $(\psi_1 \land \psi_2)$ $\iff$ x " " " ψ_1 oder ψ_2
- x " " " $\exists y \psi$ $\iff$ $x \neq y$ und x ist frei in ψ.

Kommt x in φ vor und ist nicht frei, so ist x <u>gebunden</u>.

z.B.: x frei in $[x^2 \doteq \underline{0}]$, x ist gebunden in $[\exists x\ x^2 \doteq \underline{0}]$

Lem 1.18: Falls $\vec{b}$ und $\vec{c}$ auf allen Variablen übereinstimmen, die frei in φ sind, gilt

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{b}] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{c}].$$

z.B. L_{ring}

$\varphi\ (x_1^2 + x_2 \doteq \underline{0}) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots]$

$\vec{b} = (1, 5, 7, \ldots)$ ~~So~~ oder so $\mathbb{Q} \not\models \varphi[\vec{b}]$

$\vec{c} = (1, 5, 9, \ldots)$ $\not\models \varphi[\vec{c}]$

Notation:

„$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$": $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ und alle freien Variablen von φ sind in $\{x_1, \ldots, x_n\}$

$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ falls $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{b}]$ für eine Belegung $\vec{b}(x_i) = a_i$

z.B. $\varphi = (x_1^2 + x_2^2 \doteq 0)$ $\mathbb{Q} \not\models \varphi[5, 1]$.