Def 1.19: Sei $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine L-Formel und $\mathcal{A}$ eine L-Struktur.

- Die Menge
$$\varphi(\mathcal{A}) := \{\bar{a} \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]\} \subseteq A^n$$
heißt <u>Realisierung</u> von φ.
- Eine Teilmenge $S \subseteq A^n$ heißt <u>0-definierbar</u> falls $S = \varphi(\mathcal{A})$ für eine Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

- Ist $B \subseteq A$, dann erhalten wir eine neue Sprache $L(B) = L \cup B$, indem wir jedes Element aus B als neue Konstante hinzufügen. $\mathcal{A}$ ist dann auf offensichtliche Weise auch eine $L(B)$-Struktur, die wir mit $\mathcal{A}_B = (\mathcal{A}, b)_{b \in B}$ bezeichnen.
- Sei $B \subseteq A$. Eine Teilmenge $S \subseteq A^n$ heißt <u>B-definierbar</u> falls $S = \varphi(\mathcal{A})$ für eine $L(B)$-Formel $\varphi(x)$.
- $S \subseteq A^n$ ist <u>definierbar</u> wenn es B-definierbar für ein (beliebiges) $B \subseteq A$ ist.

- <u>Zwei Formeln heißen äquivalent</u>, wenn sie in jeder Struktur dieselben Mengen definieren.

§ 1.3 Theorien

Sei L eine Sprache.

Def 1.20:

- Eine Formel ohne freie Variablen ist eine L-Aussage.
- Ist φ eine Aussage und $\mathcal{A} \models \varphi$ (d.h. $\mathcal{A} \models \varphi[\vec{b}]$ für bel. $\vec{b}$), dann sagen wir φ gilt in $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}$ ist ein Modell für φ
- Eine L-Theorie T ist eine Menge von L-Aussagen.
- $\mathcal{A}$ ist ein Modell für T falls $\mathcal{A} \models \varphi$ für jedes $\varphi \in T$ gilt.
- Eine Theorie ist konsistent, wenn sie ein Modell hat

- Eine Menge von L-Formeln Σ ist konsistent, wenn es eine L-Struktur $\mathcal{A}$ und eine Belegung $\vec{b}$ gibt, sodass $\mathcal{A} \models \varphi[\vec{b}]$ für alle $\varphi \in \Sigma$.
- Σ ist konsistent mit T falls $\Sigma \cup T$ konsistent ist.

Lemma 1.21: Sei T eine L-Theorie und $L' \supseteq L$ eine Erweiterung von L. Dann ist T konsistent als L-Theorie gdw T konsistent als L'-Theorie ist.

Def 1.22: Ist φ eine Aussage, die in allen Modellen von T gilt, dann <u>folgt φ aus T</u>, wir schreiben $T \vdash \varphi$.

Ist S eine weitere Theorie, so schreiben wir $T \vdash S$ falls alle Modelle von T auch Modelle von S sind und $T \equiv S$ falls $T \vdash S$ und $S \vdash T$

Def 1.23: Sei T eine konsistente L-Theorie.

- T ist <u>vollständig</u> falls für alle L-Aussagen φ gilt:

  $T \vdash \varphi$ oder $T \vdash \neg\varphi$.

- Ist T vollständig, so definieren wir $|T| = \max(|L|, \aleph_0)$.

Lemma 1.24: Eine konsistente Theorie ist genau dann vollständig, wenn sie maximal konsistent ist, d.h. falls sie äquivalent zu jeder konsistenten Erweiterung ist.

Def 1.25: Zwei L-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen <u>elementar äquivalent</u>, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, falls $Th(\mathcal{A}) = Th(\mathcal{B})$, d.h. falls für alle L-Aussagen φ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{B} \models \varphi.$$

Lemma 1.26: Sei T eine konsistente Theorie. Dann sind äquivalent:

1. T ist vollständig.
2. Alle Modelle von T sind elt. äquivalent
3. Es gibt eine Struktur $\mathcal{A}$ s.d. $T = Th(\mathcal{A})$.

§2 Elementare Unterstrukturen, Kompaktheit und Modelle in unterschiedlicher Kardinalität

In diesem Abschnitt ist L eine beliebige, feste Sprache.

§2.1 Elementare Unterstrukturen

Def 2.1: Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ L-Strukturen. Eine Abbildung $h: A \to B$ heißt elementar falls sie die Gültigkeit von Formeln erhält. D.h. für alle L-Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ und $a_1, \dots, a_n \in A$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \iff \mathcal{B} \models \varphi[h(a_1), \dots, h(a_n)].$$

- Eine Unterstruktur $\mathcal{A}$ von $\mathcal{B}$ heißt elementar falls die Inklusionsabbildung elementar ist, d.h. falls

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \iff \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$$

für alle $a_1, \dots, a_n \in A \subseteq B$. Wir schreiben dann $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ und sagen, $\mathcal{B}$ ist eine elementare Erweiterung von $\mathcal{A}$.

Satz 2.2 (Tarskis Test): Sei $\mathcal{B}$ eine L-Struktur und $A \subseteq B$. Dann ist A Universum einer elementaren Unterstruktur gdw jede $L(A)$-Formel $\varphi(x)$, welche in $\mathcal{B}$ erfüllbar ist, schon durch ein Element in A erfüllt wird.

Kor. 2.3: Sei $\mathfrak{B}$ eine L-Struktur und $S \subseteq B$. Dann besitzt $\mathfrak{B}$ eine elementare Unterstruktur $\mathfrak{A}$, die S enthält und s.d.

$|\mathfrak{A}| \leq \max(|S|, |L|, \aleph_0)$.

Def 2.4: Eine gerichtete Familie $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ von Strukturen heißt <u>elementar</u>, falls $\mathfrak{A}_i \prec \mathfrak{A}_j$ für $i \leq j$.

Satz 2.5 (Tarskis Kettenlemma): Die Vereinigung einer elementaren gerichteten Familie $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ ist eine elementare Erweiterung aller $\mathfrak{A}_i$.