Def 1.19: Sei $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ eine $\mathcal{L}$-Formel und $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur.

- Die Menge
  $$\varphi(\mathcal{A}) := \{\bar{a} \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]\} \subseteq A^n$$
  heißt *Realisierung* von φ.
- Eine Teilmenge $S \subseteq A^n$ heißt *0-definierbar* falls $S = \varphi(\mathcal{A})$ für eine Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$.

Bsp.: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ring}$, $\varphi(\bar{x}) = [P(\bar{x}) \doteq 0]$

Polynom in $\mathbb{Z}[x_1 \dots]$

Reicht nur $P(\bar{x}) \in \mathbb{Z}[\bar{x}]$

$\rightsquigarrow \{\pm\sqrt{2}\}$ 0-definierbar in $\mathbb{C}$ via $\varphi(x) = [x^2 \doteq 2]$

$\mathcal{A} = \mathbb{C}$ $\qquad \{\pm\sqrt{\pi}\}$

„$x^2 \doteq \pi$"

- Ist $B \subseteq A$, dann erhalten wir eine neue Sprache $\mathcal{L}(B) = \mathcal{L} \cup B$, indem wir jedes Element aus B als neue Konstante hinzufügen. $\mathcal{A}$ ist dann auf offensichtliche Weise auch eine $\mathcal{L}(B)$-Struktur, die wir mit $\mathcal{A}_B = (\mathcal{A}, b)_{b \in B}$ bezeichnen.
- Sei $B \subseteq A$. Eine Teilmenge $S \subseteq A^n$ heißt *B-definierbar* falls $S = \varphi(\mathcal{A})$ für eine $\mathcal{L}(B)$-Formel $\varphi(x)$.
- $S \subseteq A^n$ ist *definierbar* wenn es B-definierbar für ein (beliebiges) $B \subseteq A$ ist.

- *Zwei Formeln heißen äquivalent*, wenn sie in jeder Struktur dieselben Mengen definieren. (Syntax - Semantik)

§ 1.3 Theorien

Sei L eine Sprache.

Def 1.20:

- Eine Formel ohne freie Variablen ist eine L-Aussage.
- Ist φ eine Aussage und $\mathcal{A} \models \varphi$ (d.h. $\mathcal{A} \models \varphi[\vec{b}]$ für bel. $\vec{b}$), dann sagen wir φ gilt in $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}$ ist ein Modell für φ
- Eine L-Theorie T ist eine Menge von L-Aussagen.
- $\mathcal{A}$ ist ein Modell für T falls $\mathcal{A} \models \varphi$ für jedes $\varphi \in T$ gilt.
- Eine Theorie ist konsistent, wenn sie ein Modell hat

Semantik - Syntax

- Eine Menge von L-Formeln Σ ist konsistent, wenn es eine L-Struktur $\mathcal{A}$ und eine Belegung $\vec{b}$ gibt, sodass $\mathcal{A} \models \varphi[\vec{b}]$ für alle $\varphi \in \Sigma$.
- Σ ist konsistent mit T falls $\Sigma \cup T$ konsistent ist.

Bsp.: AbG, Theorie der abelschen Gruppen

$L_{grp} = \{+, -, \underline{0}\}$ $\qquad \varphi = x + y \boxed{\doteq} y + x$

- $\forall x, y, z \quad (x+y)+z \doteq x + (y+z)$
- $\forall x \quad \underline{0} + x \doteq x$
- $\forall x \quad (-x) + x \doteq \underline{0}$
- $\forall x, y \quad x + y \doteq y + x$

Theorie der Gruppen

Übung

- Theorie der komm. Ringe?
- Theorie der Körper?

Ist G ein Modell von AbG, dann ist G eine abelsche Gruppe.

Lemma 1.21: Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie und $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$ eine Erweiterung von $\mathcal{L}$. Dann ist T konsistent als $\mathcal{L}$-Theorie gdw T konsistent als $\mathcal{L}'$-Theorie ist.

Def 1.22: Ist φ eine Aussage, die in allen Modellen von T gilt, dann <u>folgt φ aus T</u>, wir schreiben $T \vdash \varphi$.

Ist S eine weitere Theorie, so schreiben wir $T \vdash S$ falls alle Modelle von T auch Modelle von S sind und $T \equiv S$ falls $T \vdash S$ und $S \vdash T$

Semantik $\Rightarrow$ Syntax

Bsp. $AbG \vdash$ Theorie der Gruppen

Def 1.23: Sei T eine konsistente $\mathcal{L}$-Theorie.

- T ist <u>vollständig</u> falls für alle $\mathcal{L}$-Aussagen φ gilt:

  $T \vdash \varphi$ oder $T \vdash \neg\varphi$.

- Ist T vollständig, so definieren wir $|T| = \max(|\mathcal{L}|, \aleph_0)$.

Bem.: $|T| = |\{\mathcal{L}\text{-Formeln}\}|$

Typische Bsp. für vollst. Theorie: $Th(\mathcal{A}) = \{\varphi \mid \mathcal{A} \models \varphi\}$

Lemma 1.24: Eine konsistente Theorie ist genau dann vollständig, wenn sie maximal konsistent ist, d.h. falls sie äquivalent zu jeder konsistenten Erweiterung ist.

Def 1.25: Zwei L-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen <u>elementar äquivalent</u>, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, falls $Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$, d.h. falls für alle L-Aussagen φ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi.$$

Lemma 1.26: Sei T eine konsistente Theorie. Dann sind äquivalent:

1. T ist vollständig.
2. Alle Modelle von T sind elt. äquivalent
3. Es gibt eine Struktur $\mathfrak{A}$ s.d. $T \equiv Th(\mathfrak{A})$.

Bew.:

$1. \Rightarrow 3.$ Sei $\mathfrak{A}$ ein Modell von T. Gilt φ in $\mathfrak{A}$, dann kann nicht gelten $T \vdash \neg\varphi$. Ist T vollst. gilt $T \vdash \varphi$.

$\Rightarrow T \equiv Th(\mathfrak{A})$

$3. \Rightarrow 2.$ Sei $\mathfrak{B} \models T$ ein weiteres Modell. Dann haben wir $\mathfrak{B} \models Th(\mathfrak{A})$ und $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$.

$2. \Rightarrow 1.$ Sei $\mathfrak{A}$ Modell von T und φ eine bel. L-Aussage. Gilt φ in $\mathfrak{A}$, dann gilt es nach Annahme φ in allen Modellen von T, also $T \vdash \varphi$.
Sonst gilt $\neg\varphi$ in $\mathfrak{A}$ und damit $T \vdash \neg\varphi$. $\square$

§2 Elementare Unterstrukturen, Kompaktheit und Modelle in unterschiedlicher Kardinalität

In diesem Abschnitt ist L eine beliebige, feste Sprache.

§2.1 Elementare Unterstrukturen

Def 2.1: Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ L-Strukturen. Eine Abbildung $h: A \to B$ heißt elementar falls sie die Gültigkeit von Formeln erhält. D.h. für alle L-Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ und $a_1, \dots, a_n \in A$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \iff \mathcal{B} \models \varphi[h(a_1), \dots, h(a_n)].$$

Bem.: Ist h elementar, dann erhält h (insbes.) quantorenfreie Formeln $\Rightarrow$ h Einbettung Übung

$\rightsquigarrow$ „elementare Einbettung" $h: \mathcal{A} \xrightarrow{\prec} \mathcal{B}$

- Eine Unterstruktur $\mathcal{A}$ von $\mathcal{B}$ heißt elementar falls die Inklusionsabbildung elementar ist, d.h. falls

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \iff \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$$

für alle $a_1, \dots, a_n \in A \subseteq B$. Wir schreiben dann $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ und sagen, $\mathcal{B}$ ist eine elementare Erweiterung von $\mathcal{A}$.

Satz 2.2 (Tarskis Test): Sei $\mathcal{B}$ eine L-Struktur und $A \subseteq B$. Dann ist A Universum einer elementaren Unterstruktur gdw jede $L(A)$-Formel $\varphi(x)$, welche in $\mathcal{B}$ erfüllbar ist, schon durch ein Element in A erfüllt wird.

Bew.:

„⇒" Ist $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \models \exists x\, \varphi(x)$, dann gilt $\mathcal{A} \models \exists x\, \varphi(x)$, also gibt es $a \in A$ s.d. $\mathcal{A} \models \varphi(a)$. Daher $\mathcal{B} \models \varphi(a)$.

„⇐": Ang., jede $L(A)$, die in $\mathcal{B}$ erfüllbar ist, wird in A erfüllt.

Wir zeigen zunächst: A ist Universum einer U'str. $\mathcal{A}$.

Die $L(A)$-Formel $x \doteq x$ ist erfüllbar in $\mathcal{B}$, also ist $A \neq \emptyset$.

Ist $c \in L(A)$ eine Konstante, dann $\exists x\; x \doteq c$ ist erfüllbar in $\mathcal{B}$, also enthält A alle Konstanten.

Ist $f \in L$ ein n-stelliges Funktionssymbol und sind $a_1, \dots, a_n \in A$, dann ist die Formel

$$\varphi(x) = [f(a_1, \dots, a_n) \doteq x]$$

in $\mathcal{B}$ durch ein Elt. in A erfüllbar. Also ist $\mathcal{A}$ abg. unter Funktionssymbolen.

Wir zeigen per Induktion über die Komplexität von φ, dass

$$\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$$

für alle $L(A)$-Aussagen φ. Für atomare Aussagen klar. Induktionsschritte für $\varphi = \neg\psi$ und

$\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ ist trivial.
Nehme daher an, $\varphi = \exists x\, \varphi(x)$. Gilt φ in $\mathcal{A}$, dann exist. $a \in A$, s.d. $\mathcal{A} \models \varphi(a)$. Nach Ind'voraussetzung $\mathcal{B} \models \varphi(a)$, also $\mathcal{B} \models \varphi$. Nehmen wir umgekehrt an, dass $\mathcal{B} \models \varphi$. Dann ist $\varphi(x)$ erfüllbar in $\mathcal{B}$, also nach Voraussetzung durch $a \in A$.
Daher $\mathcal{B} \models \varphi(a)$ und nach Ind'vor. auch $\mathcal{A} \models \varphi(a)$, also $\mathcal{A} \models \varphi$. $\square$

Kor. 2.3: Sei $\mathcal{B}$ eine L-Struktur und $S \subseteq B$. Dann besitzt $\mathcal{B}$ eine elementare Unterstruktur $\mathcal{A}$, die S enthält und s.d.

$|\mathcal{A}| \leq \max(|S|, |L|, \aleph_0)$.

Strukturen mit Eigenschaft