Satz 2.2 (Tarskis Test): Sei $\mathcal{B}$ eine L-Struktur und $A \subseteq B$. Dann ist A Universum einer elementaren Unterstruktur gdw jede $L(A)$-Formel $\varphi(x)$, welche in $\mathcal{B}$ erfüllbar ist, schon durch ein Element in A erfüllt wird.

Kor. 2.3: Sei $\mathcal{B}$ eine L-Struktur und $S \subseteq B$. Dann besitzt $\mathcal{B}$ eine elementare Unterstruktur $\mathcal{A}$, die S enthält und s.d. $|\mathcal{A}| \leq \max(|S|, |L|, \aleph_0)$.

Def 2.4: Eine gerichtete Familie $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ von Strukturen heißt <u>elementar</u>, falls $\mathcal{A}_i \prec \mathcal{A}_j$ für $i \leq j$.

Satz 2.5 (Tarskis Kettenlemma): Die Vereinigung einer elementaren gerichteten Familie $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ ist eine elementare Erweiterung aller $\mathcal{A}_i$.

§2.2 Kompaktheitssatz

Sei T eine L-Theorie.

Def 2.6: T heißt <u>endlich erfüllbar</u>, falls jede ihrer endlichen Teilmengen konsistent ist.

Satz 2.7 (Kompaktheitssatz): Jede endlich erfüllbare Theorie ist konsistent.

Kor 2.8: $T \vdash \varphi$ genau dann wenn es eine endliche Teilmenge $\Delta \subseteq T$ gibt s.d. $\Delta \vdash \varphi$.

Kor 2.9: Eine Menge von Formeln $\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ ist konsistent mit T genau dann wenn jede endliche Teilmenge von Σ konsistent mit T ist.

Def 2.10: Sei $\mathcal{A}$ eine L-Struktur und $B \subseteq A$ und $\Sigma(x)$ eine Menge von $L(B)$-Formeln mit mindestens einer freien Variablen

- $a \in A$ <u>realisiert</u> $\Sigma(x)$, falls a alle Formeln aus $\Sigma(x)$ realisiert. Gibt es solch ein a, schreiben wir $\mathcal{A} \models \Sigma(a)$.
- $\Sigma(x)$ ist <u>endlich erfüllbar</u> in $\mathcal{A}$ falls jede endliche Teilmenge von Σ in $\mathcal{A}$ realisiert wird.

Lem. 2.11: $\Sigma(x)$ ist endlich erfüllbar in $\mathcal{A}$ genau dann wenn es eine elementare Erweiterung von $\mathcal{A}$ gibt, in der $\Sigma(x)$ realisiert wird.

Lem. 2.12: Die Modelle von $Th(\mathcal{A}_A)$ sind genau die Strukturen der Form $(\mathcal{B}, h(a))_{a\in A}$ für elementare Einbettungen $h: \mathcal{A} \xrightarrow{\preceq} \mathcal{B}$.

Def 2.12: Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $B \subseteq A$.

- Eine Menge $p(x)$ von $\mathcal{L}(B)$-Formeln ist ein 1-Typ über B, falls $p(x)$ maximal endlich erfüllbar ist.
- Wir bezeichnen mit $S(B) = S^{\mathcal{A}}(B)$ die Menge aller 1-Typen über B.
- Ein n-Typ $p(x_1, \ldots, x_n)$ über B ist eine Menge von $\mathcal{L}(B)$-Formeln in n Variablen, die maximal endlich erfüllbar in $\mathcal{A}$ ist.
- Wir bezeichnen mit $S_n(B) = S_n^{\mathcal{A}}(B)$ die Menge aller n-Typen über B.
- Jedes Element $\bar{a} \in A^n$ bestimmt einen n-Typen
  $$tp(\bar{a}/B) = tp^{\mathcal{A}}(\bar{a}/B) = \{ \varphi(\bar{x}) \mid \varphi \ \mathcal{L}(B)\text{-Formel}, \mathcal{A} \models \varphi(\bar{a}) \}$$
- Wir schreiben $tp(\bar{a}) = tp(\bar{a}/\emptyset)$.

Kor 2.14: Jede $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ hat eine elementare Erweiterung, in der alle Typen über A realisiert werden.

§2.3 Löwenheim-Skolem

Satz 2.15 (Löwenheim-Skolem): Seien $\mathcal{B}$ eine L-Struktur, $S \subseteq B$ und κ eine unendliche Kardinalzahl.

1. Falls $\max(|S|, |L|) \leq \kappa \leq |\mathcal{B}|$, dann hat $\mathcal{B}$ eine elementare Unterstruktur der Kardinalität κ, die S enthält
2. Falls $\mathcal{B}$ unendlich ist und $\max(|\mathcal{B}|, |L|) \leq \kappa$, dann hat $\mathcal{B}$ eine elementare Erweiterung der Kardinalität κ

Kor 2.16: Hat eine Theorie ein unendliches Modell, so hat sie ein Modell in jeder Kardinalität $\kappa \geq \max(|L|, \aleph_0)$.