Satz 2.2 (Tarskis Test): Sei $\mathfrak{B}$ eine L-Struktur und $A \subseteq B$. Dann ist A Universum einer elementaren Unterstruktur gdw jede $L(A)$-Formel $\varphi(x)$, welche in $\mathfrak{B}$ erfüllbar ist, schon durch ein Element in A erfüllt wird.

Kor. 2.3: Sei $\mathfrak{B}$ eine L-Struktur und $S \subseteq B$. Dann besitzt $\mathfrak{B}$ eine elementare Unterstruktur $\mathfrak{A}$, die S enthält und s.d.

$$|\mathfrak{A}| \leq \max(|S|, |L|, \aleph_0).$$

Bew.: Wir konstruieren A als Vereinigung einer aufsteigenden Folge

$S_0 \subseteq S_1 \subseteq \ldots$ von Teilmengen von B.

$S_0 := S$.

Ist S_i schon definiert, wähle für jede $L(S_i)$-Formel $\varphi(x)$, welche in $\mathfrak{B}$ erfüllbar, ein Element $a_\varphi \in B$ und def

$$S_{i+1} := S_i \cup \{a_\varphi \mid \varphi \ldots\}$$

Dass $A = \bigcup_{i \geq 0} S_i$ Universum einer elt. Unterstruktur von $\mathfrak{B}$ ist, folgt aus Tarskis Test.

Bleibt z.z., dass $|\mathfrak{A}| \leq \max\{|S|, |L|, \aleph_0) = \kappa$.

Eine L'-Formel ist eine endl. Folge von Symbolen aus L', Quantoren, $\wedge$, $\neg$, ( ). Insbesondere gibt es höchstens $|L'| + \aleph_0 = \max(|L'|, \aleph_0)$ viele solche Symbole

$\rightsquigarrow$ es gibt κ viele $L(S)$-Formeln, also $|S_1| \leq \kappa$.

Induktiv: $|S_i| \le \kappa$ für alle i.

Dann aber $|A| = |\bigcup_{i \ge 0} S_i| \le \kappa$. ∎

Def 2.4: Eine gerichtete Familie $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ von Strukturen heißt <u>elementar</u>, falls $\mathcal{A}_i \prec \mathcal{A}_j$ für $i \le j$.

Satz 2.5 (Tarskis Kettenlemma): Die Vereinigung einer elementaren gerichteten Familie $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ ist eine elementare Erweiterung aller $\mathcal{A}_i$.

Bsp.: Blatt 1, Aufgabe 5, Gegenbeispiel aus Übung war keine <u>elementare</u> gerichtete Familie.

Denn:

$$\mathcal{A}_1 = \mathbb{Z} \xrightarrow{h} \tfrac{1}{2}\mathbb{Z} = \mathcal{A}_2, \quad a \mapsto a$$

ist keine ele. Einbettung

$\varphi(x) := [\exists y : y + y = x]$

Es gilt: $\mathcal{A}_1 \not\models \varphi(1)$ ← Elt. aus $\mathcal{A}_1$

aber: $\mathcal{A}_2 \models \varphi(h(1))$

Äquivalent:

$$\mathcal{A}_1 = \mathbb{Z} \xrightarrow{h} \mathbb{Z} = \mathcal{A}_2, \quad a \mapsto 2a$$

$\mathcal{A}_1 \not\models \varphi(1)$ $\quad$ $\mathcal{A}_2 \not\models \varphi(h(1)) = \varphi(2)$

Bew (Tarski): Sei $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine elt. gerichtete Familie und $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$.

Wir zeigen per Induktion über die Komplexität von $\varphi(\bar{x})$, dass für alle $i \in I$ und $\bar{a} \in \mathcal{A}_i$ gilt:

$$\mathcal{A}_i \models \varphi(\bar{a}) \iff \mathcal{A} \models \varphi(\bar{a}).$$

Ist φ atomar, so ist die Aussage klar. Ist $\varphi = \neg\psi$ oder $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ so folgt die Aussage aus der Induktionsvoraussetzung.

Nehmen wir also an, $\varphi(\bar{x}) = \exists y\, \psi(\bar{x}, y)$. Dann gilt $\varphi(\bar{a})$ in $\mathcal{A}$ gdw. es $b \in A$ s.d. $\mathcal{A} \models \psi(\bar{a}, b)$. Da die Fam. $(\mathcal{A}_i)_i$ gerichtet ist, gibt es $j \ge i$ s.d. $b \in A_j$. Nach Ind.-vor.

$\mathcal{A} \models \psi(\bar{a}, b) \iff \mathcal{A}_j \models \psi(\bar{a}, b)$

$\Rightarrow \varphi(\bar{a})$ gilt in $\mathcal{A}$ gdw es in $\mathcal{A}_j$ gilt

Aber $\mathcal{A}_i \prec \mathcal{A}_j$.

$\square$

§ 2.2 Kompaktheitssatz

Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie.

Def 2.6: T heißt <u>endlich erfüllbar</u>, falls jede ihrer endlichen Teilmengen konsistent ist.

Satz 2.7 (Kompaktheitssatz): Jede endlich erfüllbare Theorie ist konsistent.

Kor 2.8: $T \vdash \varphi$ genau dann wenn es eine endliche Teilmenge $\Delta \subseteq T$ gibt s.d. $\Delta \vdash \varphi$.

Bew.: $T \vdash \varphi$ gdw. $T \cup \{\neg\varphi\}$ ist inkonsistent. $\square$

Kor 2.9: Eine Menge von Formeln $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$ ist konsistent mit T genau dann wenn jede endliche Teilmenge von Σ konsistent mit T ist.

Bew.: Erweitere $\mathcal{L}$ durch neue Konstanten $c_1, \dots, c_n$. Dann ist Σ konsistent mit T gdw $T \cup \Sigma(c_1, \dots, c_n)$ konsistent ist.

Kpt. heit
$\Longleftrightarrow$ Jede endliche Teilmenge von $T \cup \Sigma(c_1, \dots, c_n)$ konsistent $\square$

Def 2.10: Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-~~Struktur~~ und $B \subseteq A$ und $\Sigma(x)$ eine Menge von $\mathcal{L}(B)$-Formeln mit mindestens einer freien Variable

- $a \in A$ <u>realisiert</u> (oder <u>erfüllt</u>) $\Sigma(x)$, falls a alle Formeln aus $\Sigma(x)$ realisiert. Gibt es solch ein a, schreiben wir $\mathcal{A} \models \Sigma(a)$
- $\Sigma(x)$ ist <u>endlich erfüllbar</u> in $\mathcal{A}$ falls jede endliche Teilmenge von Σ in $\mathcal{A}$ realisiert wird.

Lem. 2.11: $\Sigma(\bar{x})$ ist endlich erfüllbar in $\mathcal{A}$ genau dann wenn es eine elementare Erweiterung von $\mathcal{A}$ gibt, in der $\Sigma(\bar{x})$ realisiert wird.

Lem. 2.12: Die Modelle von $Th(\mathcal{A}_A)$ sind genau die Strukturen der Form $(\mathcal{B}, h(a))_{a \in A}$ für elementare Einbettungen $h: \mathcal{A} \xrightarrow{\prec} \mathcal{B}$.

Bew. 2.11:

„$\Leftarrow$" Sei $\mathcal{B} \succ \mathcal{A}$, s. d. $\mathcal{B} \models \Sigma(\bar{b})$

Für $\varphi_1(\bar{x}), \dots, \varphi_n(\bar{x}) \in \Sigma(\bar{x})$ gilt dann:

$\mathcal{B} \models \exists \bar{x}\, \varphi_1(\bar{x}) \wedge \dots \wedge \varphi_n(\bar{x})$.

$\mathcal{B} \succ \mathcal{A}$, daher $\mathcal{A} \models \exists \bar{x}\, \varphi_1(\bar{x}) \wedge \dots \wedge \varphi_n(\bar{x})$.

„$\Rightarrow$" Sei $\Sigma(\bar{x})$ end. erfüllbar in $\mathcal{A}$.

$\leadsto$ Für $\varphi_1(\bar{x}), \dots, \varphi_n(\bar{x}) \in \Sigma(\bar{x})$

$\mathcal{A}_A \models \exists \bar{x}\, \varphi_1(\bar{x}) \wedge \dots \wedge \varphi_n(\bar{x})$

$\leadsto$ jede endl. Teilmenge von $\Sigma(\bar{x})$ konsist. mit $Th(\mathcal{A}_A)$.

$\overset{\text{Kor 2.9}}{\Rightarrow}$ $\Sigma(\bar{x})$ konsistent mit $Th(\mathcal{A}_A)$, also gibt es ein Modell

$\overset{\text{Lem 2.12}}{\Rightarrow}$ So ein Modell ist von der Form $\mathcal{B} \succ \mathcal{A}$, in dem $\Sigma(\bar{x})$ erfüllt wird.

$\square$

Def 2.12: Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $B \subseteq A$.

- Eine Menge $p(x)$ von $\mathcal{L}(B)$-Formeln ist ein 1-<u>Typ</u> über B, falls $p(x)$ maximal endlich erfüllbar ist.
- Wir bezeichnen mit $S(B) = S^{\mathcal{A}}(B)$ die Menge aller 1-Typen über B.
- Ein <u>n-Typ</u> $p(x_1, \ldots, x_n)$ über B ist eine Menge von $\mathcal{L}(B)$-Formeln in n Variablen, die maximal endlich erfüllbar in $\mathcal{A}$ ist
- Wir bezeichnen mit $S_n(B) = S_n^{\mathcal{A}}(B)$ die Menge aller n-Typen über B.
- Jedes Element $\bar{a} \in A^n$ bestimmt einen n-Typen
$$tp(\bar{a}/B) = tp^{\mathcal{A}}(\bar{a}/B) = \{ \varphi(\bar{x}) \mid \varphi \ \mathcal{L}(B)\text{-Formel}, \mathcal{A} \models \varphi(\bar{a}) \}$$

- Wir schreiben $tp(\bar{a}) = tp(\bar{a}/\emptyset)$.

Bem 2.13:
- a realisiert $p \in S(B) \Leftrightarrow p = tp(a/B)$
- $\mathcal{A}' \prec \mathcal{A} \Rightarrow S^{\mathcal{A}}(B) = S^{\mathcal{A}'}(B)$, $tp^{\mathcal{A}'}(a/B) = tp^{\mathcal{A}}(a/B)$

  $\leadsto S(B) = S^{\mathcal{A}}(B) = S^{\mathcal{A}'}(B)$ wohldef.

Kor 2.14: Jede $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ hat eine elementare Erweiterung, in der alle Typen über A realisiert werden.

Bew.: Nach dem Wohlordnungssatz finden wir eine Aufzählung $(p_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ eine Aufzählung von $S(A)$, wobei λ eine Ordinalzahl ist.

Wir definieren jetzt eine elementare Kette

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \prec \mathcal{A}_1 \prec \mathcal{A}_2 \prec \ldots \prec \mathcal{A}_\beta \prec \ldots \qquad \beta \leq \lambda,$$

sodass p_α in $\mathcal{A}_{\alpha+1}$ realisiert wird.

Dann wird in $\mathcal{B} = \mathcal{A}_\lambda$ jeder Typ über A realisiert.

Def der Kette induktiv:

Angenommen, $(\mathcal{A}_{\alpha'})_{\alpha' < \beta}$ ist schon konstruiert.

β Limeszahl: Dann def. wir $\mathcal{A}_\beta := \bigcup_{\alpha<\beta} \mathcal{A}_\alpha$.

Nach Tarskis Kettenlemma (Satz 2.5)

ist $(\mathcal{A}_{\alpha'})_{\alpha' \leq \beta}$ elementar.

$\beta = \alpha + 1$ Nachfolgerzahl: p_α ist endl. erfüllbar in $\mathcal{A}_\alpha$

$\overset{\text{Lem 2.11}}{\Rightarrow}$ gibt el. Erw. $\mathcal{A}_\beta$, in der p_α erfüllt wird. $\square$